

铅酸电池剩余放电时间预测模型

摘 要

本文针对电池剩余放电时间的预测问题，通过回归分析，相关分析等多种方法，综合分析了不同电流强度的放电曲线、不同衰减状态下放电时间的数据，建立了电压和放电时间和电流的回归数学模型，运用 *Matlab*、*Spss*、*Excel* 软件回归出放电曲线的初等函数表达式。最后，将模型的结果与新电池状态、衰减状态相结合，根据附件 2 的数据做出了对电池剩余量进行预测的模型，并对如何预测电池剩余放电时间提出了可行性方案。

针对问题一，根据不同电流强度的放电曲线的采样数据，首先利用散点图，结合相关性检验，分析并建立了电压关于时间的二次多项式回归模型，同时结合 *MRE* 的定义求出不同电流取值下的平均相对误差，进而得到电池剩余放电时间。

针对问题二，运用 *Excel* 软件对数据的进一步整理分析，通过电压分别与电流强度、放电时间的关系，并考虑电流与时间交互作用对电压的影响，从而建立了多元回归模型，并用 *MRE* 评估了模型的精度，进一步得到 55A 电流强度下的放电曲线。

针对问题三，首先通过分析前三种状态与电压关系的散点图，得出它们大致呈现二次多项式关系，另外运用相关性分析得出四种状态符合线性相关关系，进而建立电压与衰减状态 3 的二次多项式回归模型，并预测了衰减状态 3 的剩余放电时间。

本文通过综合运用回归分析、相关分析等方法，给出了较为完善的预测电池剩余放电时间的模型，并且对电池放电模型作了推广。

关键词：铅酸电池放电； 相关分析； 回归分析； 置信区间 ； *Spss*

一. 问题的重述

1.1 背景知识

(1) 铅酸电池^[1]: 铅酸电池又称为铅酸蓄电池, 因其价格低廉、原料易得、性能可靠、容易回收和适于大电流放电等特点, 已成为世界上产量最大, 用途最广的蓄电池品种。现已被广泛用于工业、军事、日常生活中。铅酸蓄电池经过一百多年的发展, 技术不断更新, 现已被广泛应用于汽车、通信、电力、铁路、电动车等各个领域。

(2) *MRE*: 利用放电曲线预测电池剩余容量/放电时间的精度取决于放电曲线在低电压段的质量。但是, 放电曲线等时间间隔采样在低电压段的采样点相对稀疏。

1.2 相关数据

- (1) 不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据 (详见原题附件 1);
- (2) 不同衰减状态下同一电流强度从充满电后放电的记录数据 (详见原题附件 2)。

1.3 要解决的问题

(1) 问题一

根据附件 1 的数据, 用初等函数表示各放电曲线; 再求出各放电曲线的相对误差; 如果在新电池的使用中, 以相应的电流强度放电时电压是 9.8 伏, 根据模型求电池的剩余放电时间。

(2) 问题二

建立 20A 到 100A 额恒定电流强度放电时的放电曲线模型; 再用 *MRE* 评估模型的精度; 用表格和图形给出电流强度为 55A 的放电曲线。

(3) 问题三

根据附件 2 预测电池衰减状态 3 的剩余放电时间。

二. 问题的分析

2.1 对问题的总体分析

电池剩余放电时间预测是一个涉及电流强度、电压大小等多方面的问题, 同时受到多种衰减状态对预测时间造成一定的影响, 因此对预测电池剩余放电时间具有很大的不确定性。随着现代生产生活对科学技术发展的要求, 安全性、可靠性的提高, 从成本、可靠性的角度考虑, 铅酸电池应用越来越广泛。因此, 本文考虑从电压和电流入手, 预测剩余放电时间, 最终, 建立回归模型, 为题目提供一个相对完善的预测标准。

2.2 对问题的具体分析

(1) 对问题一的分析

根据附件 1 中同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据。先用 *Matlab* 软件进行线性回归分析, 然后再对模型通过多项式回归进行优化。

其次，利用错位相减法得出电压差值，再根据 *MRE* 定义提取 231 个电压样本，代入模型得出预测时间，与原放电时间相减取绝对值，再对其求平均相对误差。最后，根据模型求出当前电压到 U_m 剩余放电时间的差值。

(2) 对问题二的分析

通过对平均电压与放电时间和电流强度的研究，通过建立多元回归模型分析它们之间关系。附件 1 中给出了放电曲线的采样数据，对这些数据加以统计分析，结合问题一的方法取出 231 个样本点，代入回归模型^[3]，从而论证 *MRE* 评估模型的精度；最终，分析电流强度和放电时间得出电压，再通过图表与数据相结合清晰展现放电曲线。

(3) 对问题三的分析

根据原题附件 2 同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度从充满电开始放电的数据，然后分别对四种状态两两进行相关分析，从而得到新电池状态^[4]、衰减状态 1 和衰减状态 2 分别与衰减状态 3 呈线性回归关系，进而对电压与四种状态进行回归分析，最后，得出电压与四种状态呈二次多项式回归关系。

三. 模型的假设

- (1) 假设附件提供的数据真实有效；
- (2) 假设新出厂电池储电量无显著性差异；
- (3) 假设对于电压 U_m 来说，除去电流和时间因素外，不受其他因素影响。

四. 名词解释与符号说明

4.1 名词解释

(1) 拟合度

对已制作好的预测模型进行检验^[2]，比较它们的预测结果与实际发生情况的吻合程度。

(2) 多元回归分析

指一个因变量(预报对象), 多个自变量(预报因子)的回归模型。

(3) 置信区间^[5]

在统计学中，一个概率样本的置信区间是对这个样本的某个总体参数的区间估计。

(4) R^2 (回归拟合度)

表示的模型和样本之间的拟合度，就是说拟合度越好该模型越能代表样本观测值的趋势， R^2 越接近 1 越好。

4.2 符号说明

本模型所用的主要变量符号及意义如表 1 所示。

表 1 主要变量符号及意义

序号	符号	符号说明
1	U	电压检测值
2	U	电压预测值
3	t	放电时间/min
4	z_j	第 j 个样本的预测时间
5	z_0	原放电时间
6	η	平均相对误差
7	\bar{U}_i	第 i 种电流对应的电压预测值
8	\bar{U}_t	t 时间下对应电压的预测值
9	U_{it}	第 i 种电流 t 时间下对应的电压预测值
10	x_k	新电池或衰减状态的放电时间
11	ε	随机误差
12	R^2	回归拟合度

五. 模型建立与求解

5.1 问题一的分析与求解

1. 对问题的分析

根据附件 1 中同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据加以整理分析。求电池的剩余放电时间。利用 *Matlab* 软件作散点图分析，确定回归类型，然后进行线性回归，通过二次多项式回归进一步优化模型。其次利用错位相减法得到电压差值，再根据 U_m 不超过 0.005v 的最大间隔提取 231 个电压样本点，代入线性回归模型得出预测时间，进一步的到与不同电流值下的平均相对误差，最终得到剩余放电时间的差值。

2. 对问题的求解

(1) 模型 I——回归模型

①建模思路

首先，针对放电时间与电压成线性关系，建立一元线性回归模型，分别求出各放电曲线的函数；以 231 个电压样本点代入模型求出预测时间，再根据 MRE 给出的定义求出各个放电曲线的平均相对误差，并使用线性回归模型求出电池的剩余放电时间。

②模型建立

问题要求用初等函数表示各放电曲线，根据线性回归分析分别得出相对平均误差，最后求出电池剩余放电时间。

a. 提出假设

- 原假设 H_0 : $b = 0$ 即电压与放电时间不呈线性回归关系；
- 备择假设 H_1 : $b \neq 0$ 即电压与放电时间呈线性回归关系。

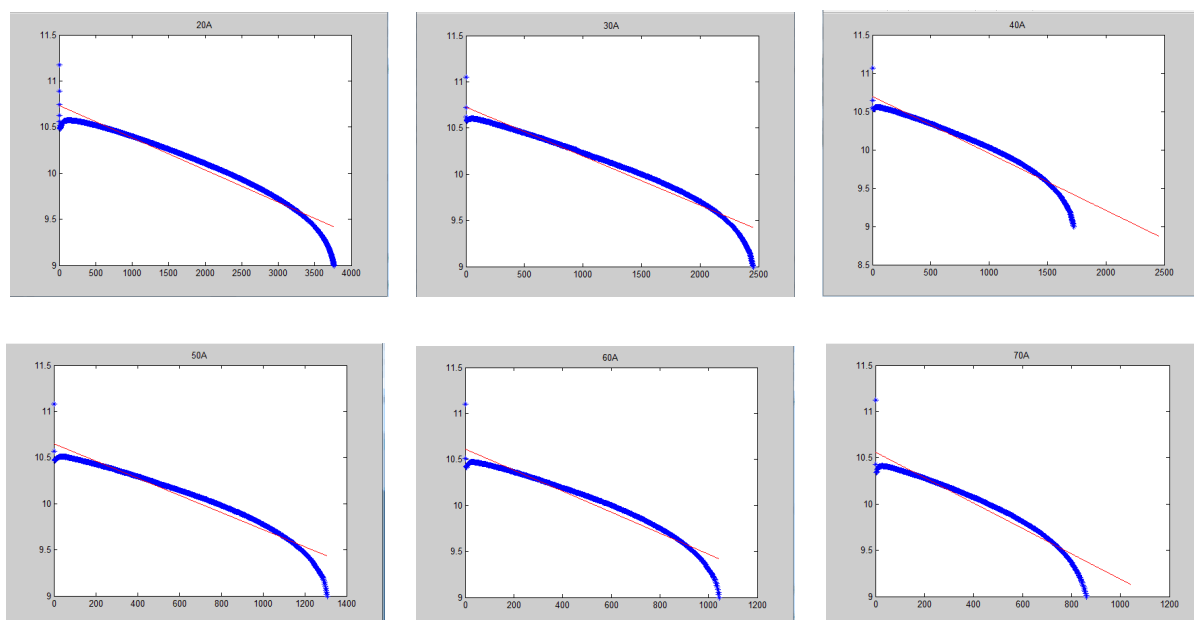
b. 确定显著性水平

定义 1 显著性水平：能否定 H_0 的人为规定的概率标准称为显著性水平，记作 α 。

依据小概率原理，规定显著性水平 $\alpha = 0.05$ 。

c. 建模过程

步骤一：首先利用 Matlab 软件对同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据加以整理分析，为了大致地分析放电时间与电压的关系，作出 20A 到 100A 电流剩余放电时间与电压的散点图。如下图 1 所示：



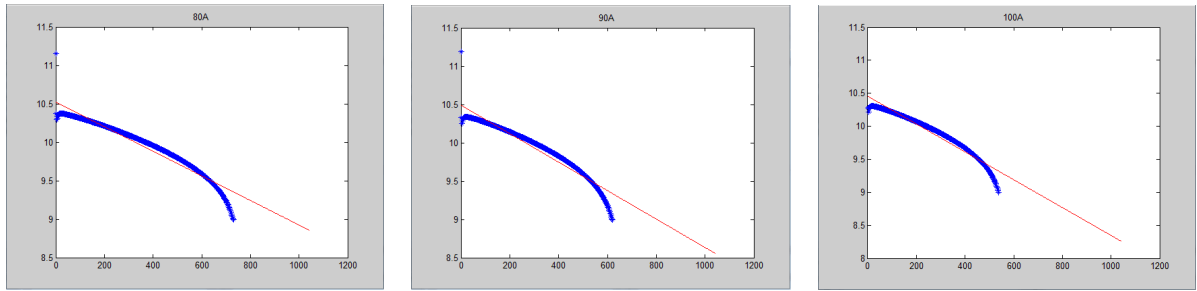


图 1 放电时间与电压的散点图

经过判断从图 1 可以发现，随放电时间的增加，电压的值有比较明显的减少趋势，图中的直线是用线性模型（ $i = 20, 30, \dots, 100$ ）

$$U_i = a + bt_i + \varepsilon \quad (1)$$

其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 是随机误差，是人们不可控制的。

利用 *Spss* 软件分别对 20A 到 100A 电流剩余放电时间与电压作线性回归分析，得出 20A 到 100A 电流剩余放电时间与电压之间的显著性检验，结果如表 2：

表 2 一次拟合显著性

电流	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
<i>Sig</i>	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05

d. 作出推断结论：是否接受原假设。

根据 *Spss* 软件得出的结果 p (*Sig*)，判断其是否小于假设 $\alpha = 0.05$ 。若小于则拒绝原假设，即电压与放电时间呈线性回归关系，否则电压与放电时间不呈线性回归关系。

③模型的求解

利用 *Matlab* 和 *Spss* 软件进行求解，得出各放电曲线的。（ $i = 20, 30, \dots, 100$ ）如下所示：

$$\begin{aligned}
 U_{20} &= 10.735 - 0.00034985t & U_{30} &= 10.728 - 0.00053154t & U_{40} &= 10.699 - 0.00074388t \\
 U_{50} &= 10.650 - 0.00092995t & U_{60} &= 10.614 - 0.0011439t & U_{70} &= 10.561 - 0.0013726t \\
 U_{80} &= 10.523 - 0.0015986t & U_{90} &= 10.491 - 0.0018576t & \widehat{U}_{100} &= 10.455 - 0.0021081t
 \end{aligned} \quad (2)$$

表 3 公式 (2) 的计算结果

	a	置信区间	b	置信区间	R^2
20A	10.735	[10.727,10.743]	-0.00034985	[-0.00353,-0.00346]	0.953
30A	10.728	[10.719,10.737]	-0.00053154	[-0.0054,-0.0053]	0.959
40A	10.699	[10.687,10.710]	-0.00074388	[-0.0076,-0.0073]	0.951
50A	10.65	[10.637,10.663]	-0.0092995	[-0.0095,-0.0091]	0.946
60A	10.614	[10.599,10.628]	-0.0011439	[-0.0012,-0.0011]	0.944
70A	10.561	[10.544,10.578]	-0.0013726	[-0.0014,-0.0013]	0.935
80A	10.523	[10.504,10.541]	-0.0015986	[-0.00164,-0.00155]	0.934
90A	10.491	[10.471,10.512]	-0.0018576	[-0.0019,-0.0018]	0.928
100A	10.455	[10.433,10.477]	-0.0021081	[-0.0022,-0.0020]	0.928

步骤二： 题目要求分别给出各放电曲线的平均相对误差。首先利用 *Excel* 软件进行错位相减，电流固定为 20A 时，用前一个电压值减去后一个电压值得出电压差。同理分别得出其他差值，再根据 U_m 不超过 0.005v 的最大间隔提取 231 个电压样本点。

根据公式 (2) 得出预测时间，与原放电时间相减取绝对值，再比上原放电时间 x_0 得出相对误差，最后进行汇总求出平均相对误差 η 。（ j 表示 231 个样本）公式如下：

$$\eta = \frac{1}{231} \sum_{j=1}^{231} \frac{|z_j - z_0|}{x_0} \quad (3)$$

步骤三： 分别将 9.8v 和 9v 电压代入步骤一中的公式 (3)，分别求出 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度下的放电时间，进行相减得到题目中要求电池的剩余放电时间^[6]。

③模型求解

a. 由公式 (3) 可以得出放电曲线的平均相对误差 η 。如下表 3:

表 3 各放电曲线的平均相对误差

电流	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
一次拟合 η	0.078	0.057	0.059	0.089	0.092	0.089	0.102	0.475	0.383

综上所述，当电流强度为 20A 时，平均相对误差结果为 0.078，同理电流强度为 30A 到 100A 的平均相对误差的结果分别为 0.057、0.059、0.089、0.092、0.089、0.102、0.475 和 0.383。

b. 根据模型 I，分别求出 9.8v 和 9v 电压下，固定电流强度放电所剩余的时间，再相减得到下表 4:

表 4 电池剩余放电时间

电流	30A	40A	50A	60A	70A
9	2454	1724	1308	1044	862
9.8	1745.87	1208.528	914.0276	711.6007	554.4223
剩余放电时间	708.1295	515.4717	393.9724	332.3993	307.5777

综合分析：分别得到在 30A、40A、50A、60A、70A 的电流强度放电，电池剩余放电时间为 708.1295、515.4717、393.9724、332.3993 和 307.5777min。

通过统计量知电压关于放电时间^[7]呈现大致的线性关系，但是从图 1 观察拟合优度有待提高，则接下来尝试二次多项式对模型进行优化。

(1) 模型进一步优化

表 5 一次拟合显著性和拟合度结果

电流	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
一次的 R^2	0.953	0.959	0.951	0.946	0.944	0.935	0.934	0.928	0.928
二次的 R^2	0.99	0.987	0.987	0.984	0.983	0.979	0.976	0.971	0.965

检验：用 *Spss* 软件作拟合度 (R^2) 检验，一次的 R^2 与二次的 R^2 的结果相比，得出二次拟合的 R^2 有所提高，显著性都小于 0.05，更符合实际。

步骤一：将原来的一次线性回归模型优化成二次线性回归模型 ($i = 20, 30, \dots, 100$)

$$U_i = a + b_i t + \frac{1}{2} c_i t^2 + \varepsilon \quad (4)$$

其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 是随机误差，是人们不可控制的。

步骤二：利用 *Spss* 软件分别对 20A 到 100A 电流剩余放电时间与电压作线性回归分析，得出 20A 到 100A 电流剩余放电时间与电压之间的显著性检验 (*Sig*)，结果如表 2：

表 6 二次拟合显著性

电流	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
<i>Sig</i>	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05	p<0.05

步骤三：利用 *Spss* 对数据进行二次拟合，建立各放电曲线的二次线性回归模型，得到结果如下：

$$\begin{aligned}
U_{20} &= 10.567 - 8.138 \times 10^{-5}t - 7.133 \times 10^{-8}t^2 \\
U_{30} &= 10.583 - 1.76 \times 10^{-4}t - 1.449 \times 10^{-7}t^2 \\
U_{40} &= 10.537 - 1.80 \times 10^{-4}t - 3.269 \times 10^{-7}t^2 \\
U_{50} &= 10.492 - 2.05 \times 10^{-4}t - 5.544 \times 10^{-7}t^2 \\
U_{60} &= 10.457 - 2.43 \times 10^{-4}t - 8.630 \times 10^{-7}t^2 \\
\widehat{U}_{70} &= 10.397 - 2.28 \times 10^{-4}t - 1.328 \times 10^{-6}t^2 \\
\widehat{U}_{80} &= 10.364 - 2.86 \times 10^{-4}t - 1.798 \times 10^{-6}t^2 \\
\widehat{U}_{90} &= 10.334 - 3.27 \times 10^{-4}t - 2.468 \times 10^{-6}t^2 \\
\widehat{U}_{100} &= 10.311 - 4.88 \times 10^{-4}t - 3.012 \times 10^{-6}t^2
\end{aligned} \tag{5}$$

根据公式(5)得出预测时间,与原放电时间相减取绝对值,再比上原放电时间 x_0 得出相对误差,最后进行汇总求出平均相对误差 η 。

步骤三: 分别将 9.8v 和 9v 电压代入步骤一中的公式(3),分别求出以 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度下的放电时间,进行相减得到题目中要求电池的剩余放电时间。

表 7 各放电曲线的平均相对误差

电流	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
一次拟合 η	0.078	0.057	0.059	0.089	0.092	0.089	0.102	0.475	0.383
二次拟合 η	0.018	0.031	0.027	0.023	0.063	0.046	0.056	0.224	0.138

表 8 各电压强度的放电时间

	30A	40A	50A	60A	70A
9V	2454.000	1724.000	1308.000	1044.000	862.000
9.8V	1511.400	1103.800	869.166	702.772	590.113
剩余放电时间	942.600	620.200	438.834	341.228	271.887

④综合分析

综上所述,根据已知数据作出散点图,建立回归模型,通过多次检验,决定取二次拟合回归变量,及它们的函数形式。用 *Matlab*, *Spss* 软件进行求解,作统计分析,拟合度和显著性的大小对模型的整体评价。在实际生活中,更加准确的预测电池的剩余放电时间。

5.3 问题二的分析与求解

1. 对问题的分析

问题要求根据同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试^[8]的完整放电曲线的采样数据进行分析,分别求出电压的平均值,然后采用多元曲线回归分析,得到电

流与电压的关系式和放电时间与电压的关系式，进而建立多元回归模型；由问题一的方法，可以取出 231 个样本点，然后代入多元回归模型，得到预测时间与原放电时间的差值，从而论证了 *MRE* 评估模型的精度；利用 *Excel* 软件中的数据分析工具，进一步运用多元回归模型，可以得到电压的值，最后，用表格与图形表示电流强度为 55A 时的放电曲线。

2. 对问题的求解

(1) 模型 II——二次多项式模型

① 建模思路

由于要求任一恒定电流放电曲线，故建立多元回归模型，然后利用模型可以得出 *MRE* 评估模型的精度，最后，运用 *Excel* 软件对数据加以整理分析，从而得出放电曲线的表格与图形表达形式。

② 模型的建立

a. 问题要求建立任一恒定电流放电曲线的模型，用 *MRE* 评估模型的精度以及用表格与图形表示电流为 55A 的放电曲线。

b. 建模过程

步骤一：首先用 *Excel* 软件对放电曲线的采样数据进行分析及处理，再运用 *Spss* 软件对电压与时间和电流强度分别进行回归分析。

步骤二：根据 *Spss* 回归分析的结果可以得到，电压与时间和电流强度分别呈二次多项式回归关系，因此建立起二次多项式模型

$$\begin{aligned}\bar{U}_i &= a_i - b_i i - c_i i^2 + \varepsilon_i \\ \bar{U}_t &= a_t - b_t t - c_t t^2 + \varepsilon_t\end{aligned}\quad (6)$$

再对其求解，得到如下：

$$\begin{aligned}\bar{U}_i &= 10.648 - 0.003i - 4.507 \times 10^{-5} i^2 + \varepsilon_i \\ \bar{U}_t &= 10.485 - 0.001t - 7.419 \times 10^{-7} t^2 + \varepsilon_t\end{aligned}\quad (7)$$

建立多元曲线回归方程，将 \bar{U}_i 与 \bar{U}_t 进行相加，得到以 20A 到 100A 之间任一电流强度^[9]放电曲线的数学模型，表达式如下：

$$U_{it} = \frac{1}{2} (21.133 - 0.003i - 4.507 \times 10^{-5} i^2 - 0.001t - 7.419 \times 10^{-7} t^2) + \varepsilon \quad (8)$$

步骤二：根据问题一的方法，选取 231 个样本点，再把 231 个样本点对应的电压值代入多元曲线回归模型，从而得出预测时间，再减去原时间。（详见附录 2）

步骤三：运用 *Excel* 软件中的数据分析工具，对电流强度为 55A 和放电时间的数据加以整理分析，分别代入多元曲线回归模型，得到对应的电压值，从而得到放电曲线。

③ 模型的求解

a. 根据模型I我们可以得到电压 U 与放电时间 t 呈一元二次回归关系,用公式(8)的多元曲线回归模型来表示20A到100A之间任一恒定电流强度放电时的放电曲线。

b. 利用Excel软件中的数据分析工具,以及模型II可以得出电压值,如下表6所示:

表9 电流强度为55A时放电曲线表格

时间	55A	时间	55A	时间	55A	时间	55A	时间	55A
0	10.415832	280	10.246749	560	10.019502	840	9.734089	1120	9.390512
2	10.414830	282	10.245332	562	10.017669	842	9.731841	1122	9.387849
4	10.413826	284	10.243912	564	10.015834	844	9.729591	1124	9.385182
6	10.412818	286	10.242489	566	10.013996	846	9.727337	1126	9.382513
8	10.411808	288	10.241064	568	10.012154	848	9.725080	1128	9.379841
10	10.410795	290	10.239635	570	10.010310	850	9.722820	1130	9.377166
12	10.409778	292	10.238203	572	10.008463	852	9.720558	1132	9.374487
14	10.408759	294	10.236768	574	10.006613	854	9.718292	1134	9.371806
16	10.407737	296	10.235330	576	10.004759	856	9.716023	1136	9.369122
18	10.406711	298	10.233890	578	10.002903	858	9.713752	1138	9.366435
20	10.405683	300	10.232446	580	10.001044	860	9.711477	1140	9.363745
22	10.404652	302	10.231000	582	9.999182	862	9.709199	1142	9.361052
24	10.403618	304	10.229550	584	9.997317	864	9.706919	1144	9.358356
26	10.402581	306	10.228097	586	9.995449	866	9.704635	1146	9.355657
28	10.401541	308	10.226642	588	9.993578	868	9.702349	1148	9.352955
30	10.400498	310	10.225183	590	9.991704	870	9.700060	1150	9.350250
32	10.399452	312	10.223722	592	9.989827	872	9.697767	1152	9.347542
34	10.398403	314	10.222257	594	9.987947	874	9.695472	1154	9.344832
36	10.397351	316	10.220790	596	9.986064	876	9.693173	1156	9.342118
38	10.396296	318	10.219320	598	9.984178	878	9.690872	1158	9.339401
40	10.395238	320	10.217846	600	9.982290	880	9.688568	1160	9.336681
42	10.394177	322	10.216370	602	9.980398	882	9.686261	1162	9.333959
44	10.393113	324	10.214891	604	9.978503	884	9.683951	1164	9.331233
46	10.392047	326	10.213409	606	9.976605	886	9.681637	1166	9.328504
48	10.390977	328	10.211923	608	9.974705	888	9.679321	1168	9.325773
50	10.389904	330	10.210435	610	9.972801	890	9.677002	1170	9.323038
52	10.388829	332	10.208944	612	9.970895	892	9.674680	1172	9.320301
54	10.387750	334	10.207450	614	9.968985	894	9.672355	1174	9.317560
56	10.386668	336	10.205953	616	9.967072	896	9.670027	1176	9.314817
58	10.385584	338	10.204453	618	9.965157	898	9.667696	1178	9.312070
60	10.384496	340	10.202950	620	9.963238	900	9.665362	1180	9.309321
62	10.383406	342	10.201444	622	9.961317	902	9.663025	1182	9.306568
64	10.382312	344	10.199935	624	9.959393	904	9.660685	1184	9.303813
66	10.381216	346	10.198423	626	9.957465	906	9.658343	1186	9.301055

68	10.380116	348	10.196908	628	9.955535	908	9.655997	1188	9.298294
70	10.379014	350	10.195390	630	9.953602	910	9.653648	1190	9.295529
72	10.377909	352	10.193869	632	9.951665	912	9.651296	1192	9.292762
74	10.376800	354	10.192346	634	9.949726	914	9.648941	1194	9.289992
76	10.375689	356	10.190819	636	9.947784	916	9.646584	1196	9.287219
78	10.374575	358	10.189289	638	9.945839	918	9.644223	1198	9.284443
80	10.373458	360	10.187757	640	9.943891	920	9.641860	1200	9.281664
82	10.372337	362	10.186221	642	9.941939	922	9.639493	1202	9.278882
84	10.371214	364	10.184682	644	9.939985	924	9.637123	1204	9.276097
86	10.370088	366	10.183141	646	9.938028	926	9.634751	1206	9.273309
88	10.368959	368	10.181596	648	9.936068	928	9.632375	1208	9.270518
90	10.367827	370	10.180049	650	9.934105	930	9.629997	1210	9.267724
92	10.366692	372	10.178498	652	9.932139	932	9.627616	1212	9.264927
94	10.365554	374	10.176945	654	9.930170	934	9.625231	1214	9.262127
96	10.364413	376	10.175388	656	9.928198	936	9.622844	1216	9.259324
98	10.363269	378	10.173829	658	9.926224	938	9.620453	1218	9.256518
100	10.362122	380	10.172266	660	9.924246	940	9.618060	1220	9.253710
102	10.360972	382	10.170701	662	9.922265	942	9.615664	1222	9.250898
104	10.359819	384	10.169133	664	9.920281	944	9.613265	1224	9.248083
106	10.358664	386	10.167562	666	9.918295	946	9.610863	1226	9.245266
108	10.357505	388	10.165987	668	9.916305	948	9.608457	1228	9.242445
110	10.356343	390	10.164410	670	9.914312	950	9.606049	1230	9.239621
112	10.355178	392	10.162830	672	9.912317	952	9.603638	1232	9.236795
114	10.354011	394	10.161247	674	9.910318	954	9.601224	1234	9.233965
116	10.352840	396	10.159661	676	9.908316	956	9.598807	1236	9.231133
118	10.351667	398	10.158072	678	9.906312	958	9.596387	1238	9.228297
120	10.350490	400	10.156480	680	9.904304	960	9.593964	1240	9.225459
122	10.349310	402	10.154885	682	9.902294	962	9.591538	1242	9.222618
124	10.348128	404	10.153287	684	9.900280	964	9.589109	1244	9.219773
126	10.346942	406	10.151686	686	9.898264	966	9.586677	1246	9.216926
128	10.345754	408	10.150082	688	9.896245	968	9.584243	1248	9.214076
130	10.344563	410	10.148475	690	9.894222	970	9.581805	1250	9.211222
132	10.343368	412	10.146865	692	9.892197	972	9.579364	1252	9.208366
134	10.342171	414	10.145252	694	9.890169	974	9.576920	1254	9.205507
136	10.340971	416	10.143637	696	9.888138	976	9.574474	1256	9.202645
138	10.339767	418	10.142018	698	9.886103	978	9.572024	1258	9.199780
140	10.338561	420	10.140396	700	9.884066	980	9.569571	1260	9.196911
142	10.337352	422	10.138771	702	9.882026	982	9.567116	1262	9.194040
144	10.336140	424	10.137144	704	9.879983	984	9.564657	1264	9.191166
146	10.334924	426	10.135513	706	9.877937	986	9.562196	1266	9.188289
148	10.333706	428	10.133880	708	9.875888	988	9.559731	1268	9.185409
150	10.332485	430	10.132243	710	9.873836	990	9.557264	1270	9.182526

152	10.331261	432	10.130603	712	9.871781	992	9.554793	1272	9.179640
154	10.330034	434	10.128961	714	9.869723	994	9.552320	1274	9.176752
156	10.328804	436	10.127316	716	9.867662	996	9.549843	1276	9.173860
158	10.327571	438	10.125667	718	9.865598	998	9.547364	1278	9.170965
160	10.326335	440	10.124016	720	9.863531	1000	9.544882	1280	9.168067
162	10.325096	442	10.122361	722	9.861461	1002	9.542396	1282	9.165166
164	10.323855	444	10.120704	724	9.859389	1004	9.539908	1284	9.162263
166	10.322610	446	10.119044	726	9.857313	1006	9.537417	1286	9.159356
168	10.321362	448	10.117380	728	9.855234	1008	9.534923	1288	9.156446
170	10.320111	450	10.115714	730	9.853152	1010	9.532426	1290	9.153534
172	10.318857	452	10.114045	732	9.851068	1012	9.529925	1292	9.150618
174	10.317601	454	10.112373	734	9.848980	1014	9.527422	1294	9.147700
176	10.316341	456	10.110698	736	9.846889	1016	9.524916	1296	9.144778
178	10.315078	458	10.109020	738	9.844796	1018	9.522407	1298	9.141854
180	10.313813	460	10.107339	740	9.842699	1020	9.519895	1300	9.138926
182	10.312544	462	10.105655	742	9.840600	1022	9.517380	1302	9.135996
184	10.311273	464	10.103968	744	9.838497	1024	9.514862	1304	9.133062
186	10.309998	466	10.102278	746	9.836392	1026	9.512341	1306	9.130126
188	10.308721	468	10.100585	748	9.834284	1028	9.509818	1308	9.127187
190	10.307440	470	10.098889	750	9.832172	1030	9.507291	1310	9.124244
192	10.306157	472	10.097190	752	9.830058	1032	9.504761	1312	9.121299
194	10.304871	474	10.095488	754	9.827941	1034	9.502228	1314	9.118351
196	10.303581	476	10.093783	756	9.825820	1036	9.499692	1316	9.115400
198	10.302289	478	10.092075	758	9.823697	1038	9.497154	1318	9.112445
200	10.300994	480	10.090365	760	9.821571	1040	9.494612	1320	9.109488
202	10.299695	482	10.088651	762	9.819442	1042	9.492067	1322	9.106528
204	10.298394	484	10.086934	764	9.817310	1044	9.489520	1324	9.103565
206	10.297090	486	10.085215	766	9.815174	1046	9.486969	1326	9.100599
208	10.295783	488	10.083492	768	9.813036	1048	9.484416	1328	9.097630
210	10.294473	490	10.081767	770	9.810895	1050	9.481859	1330	9.094658
212	10.293160	492	10.080038	772	9.808751	1052	9.479300	1332	9.091683
214	10.291844	494	10.078306	774	9.806604	1054	9.476737	1334	9.088705
216	10.290525	496	10.076572	776	9.804454	1056	9.474172	1336	9.085724
218	10.289203	498	10.074835	778	9.802302	1058	9.471604	1338	9.082741
220	10.287878	500	10.073094	780	9.800146	1060	9.469032	1340	9.079754
222	10.286550	502	10.071351	782	9.797987	1062	9.466458	1342	9.076764
224	10.285219	504	10.069604	784	9.795825	1064	9.463881	1344	9.073771
226	10.283885	506	10.067855	786	9.793660	1066	9.461300	1346	9.070776
228	10.282548	508	10.066103	788	9.791492	1068	9.458717	1348	9.067777
230	10.281208	510	10.064348	790	9.789322	1070	9.456131	1350	9.064775
232	10.279866	512	10.062589	792	9.787148	1072	9.453542	1352	9.061771
234	10.278520	514	10.060828	794	9.784971	1074	9.450950	1354	9.058763

236	10.277171	516	10.059064	796	9.782792	1076	9.448355	1356	9.055753
238	10.275820	518	10.057297	798	9.780609	1078	9.445757	1358	9.052739
240	10.274465	520	10.055527	800	9.778424	1080	9.443156	1360	9.049723
242	10.273107	522	10.053754	802	9.776235	1082	9.440552	1362	9.046703
244	10.271747	524	10.051978	804	9.774044	1084	9.437945	1364	9.043681
246	10.270383	526	10.050199	806	9.771849	1086	9.435335	1366	9.040655
248	10.269017	528	10.048417	808	9.769652	1088	9.432722	1368	9.037627
250	10.267647	530	10.046632	810	9.767451	1090	9.430106	1370	9.034596
252	10.266275	532	10.044844	812	9.765248	1092	9.427487	1372	9.031561
254	10.264899	534	10.043053	814	9.763042	1094	9.424865	1374	9.028524
256	10.263521	536	10.041259	816	9.760832	1096	9.422241	1376	9.025484
258	10.262140	538	10.039462	818	9.758620	1098	9.419613	1378	9.022441
260	10.260755	540	10.037663	820	9.756405	1100	9.416982	1380	9.019394
262	10.259368	542	10.035860	822	9.754187	1102	9.414348	1382	9.016345
264	10.257978	544	10.034054	824	9.751965	1104	9.411712	1384	9.013293
266	10.256585	546	10.032245	826	9.749741	1106	9.409072	1386	9.010238
268	10.255189	548	10.030434	828	9.747514	1108	9.406430	1388	9.007180
270	10.253789	550	10.028619	830	9.745284	1110	9.403784	1390	9.004119
272	10.252387	552	10.026802	832	9.743051	1112	9.401136	1392	9.001055
274	10.250982	554	10.024981	834	9.740815	1114	9.398484		
276	10.249574	556	10.023158	836	9.738576	1116	9.395830		
278	10.248163	558	10.021331	838	9.736334	1118	9.393172		

再用 *Matlab* 软件（源程序见附录 *b*）作出电流强度为 55A 时，放电时间与电压的放电曲线图如下：

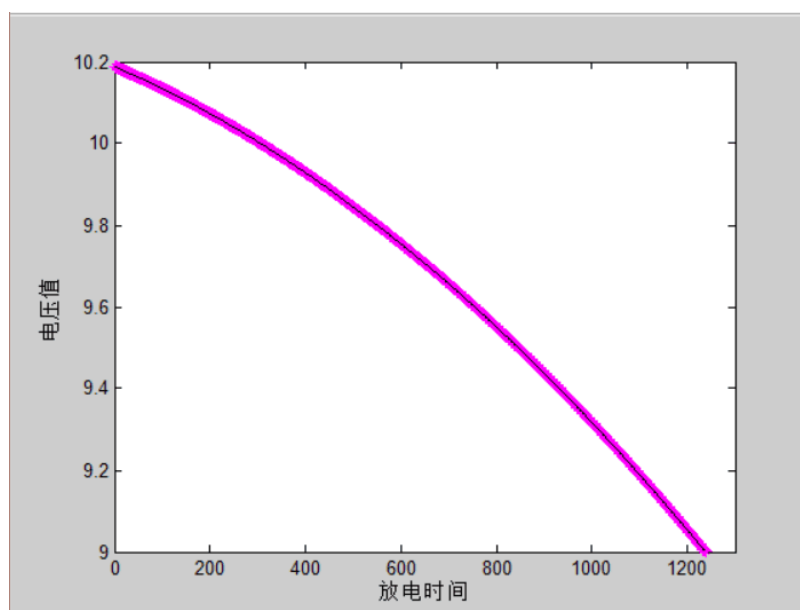


图 2 电流强度为 55A 时放电曲线图

④ 综合分析:

综上所述, 得到预测时间与原放电时间的差值越小, 从而 *MRE* 评估模型的精度越好。

5.4 问题三的分析与求解

1. 对问题的分析

根据原题附件 2 同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度从充满电开始放电的数据, 然后对四种状态 [10] 两两进行相关分析, 从而得到新电池状态、衰减状态 1 和衰减状态 2 分别与衰减状态 3 呈线性回归关系, 进而对电压与四种状态进行回归分析, 进一步的到电压与四种状态呈二次多项式回归关系。

2. 对问题的求解

(1) 模型 III —— 多元回归模型

① 建模思路

由于同一电池状态有多个, 因此利用相关分析法, 分别对新电池状态、衰减状态 1、衰减状态 2 和衰减状态 3 进行分析, 呈线性回归关系, 再对其作二次多项式回归, 通过建立模型求得衰减状态 3 的放电时间。

② 模型建立

a. 模型假设

- 当求电流对电压的影响时, 假设时间为恒定不变的值;
- 当求时间对电压的影响时, 假设电流为恒定不变的值。

b. 衰减状态 3 与其他状态的相关性分析。

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{j=1}^4 (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^4 (x_j - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^4 (y_j - \bar{y})^2}} \quad (9)$$

由 (9) 式容易得到下述定理:

定理 1° $|\rho_{xy}| \leq 1$

2° $|\rho_{xy}| = 1$ 的充要条件是, 存在常数 a, b 使

$$p\{Y = a + bX\} = 1.$$

表 10 四种状态下的双变量相关分析表

	新电池状态	衰减状态 1	衰减状态 2	衰减状态 3
相关性	1.000	1.000	1.000	1
衰减状态 3 显著性 (双侧)	.000	.000	.000	
N	148	148	148	148

最终得到新电池、衰减 1、衰减 2 分别和衰减 3 的相关性分别为：1、1 和 1，都大于 0.5。因此新电池、衰减 1、衰减 2 分别和衰减 3 有一一对应的关系，新电池与衰减 3 有相关性，衰减 1 与衰减 3 有相关性，以此类推。

c. 建模过程

步骤一：根据双变量相关分析得到新电池、衰减 1、衰减 2 分别和衰减 3 有一一对应的关系，因此建立起线性回归模型（ $j=0、1、2、3$ 分别表示新电池状态、衰减状态 1、衰减状态 2、衰减状态 3）

$$x_3 = a + bx_j + \varepsilon \quad (10)$$

表 11 衰减状态 3 与各状态的线性回归分析

	新电池	衰减 1	衰减 2
R^2	1.000	1.000	1.000
Sig	0.000	0.000	0.000

步骤二：运用 *Spss* 进行线性回归分析，求出待定系数 $a、b$ 如下所示：

$$\begin{aligned} x_3 &= -2.670 + 0.612x_0 \\ x_3 &= -1.758 + 0.716x_1 \\ x_3 &= 0.831 + 0.818x_2 \end{aligned} \quad (11)$$

	a	置信区间	b	置信区间
新电池状态	-2.67	[-3.561, -1.779]	0.612	[0.610, 0.613]
衰减状态 1	-1.758	[-2.542, -0.974]	0.716	[0.714, 0.717]
衰减状态 2	0.831	[-0.012, 1.673]	0.818	[0.816, 0.820]

步骤三：运用 *Spss* 对电压与四种状态分别进行线性回归分析。

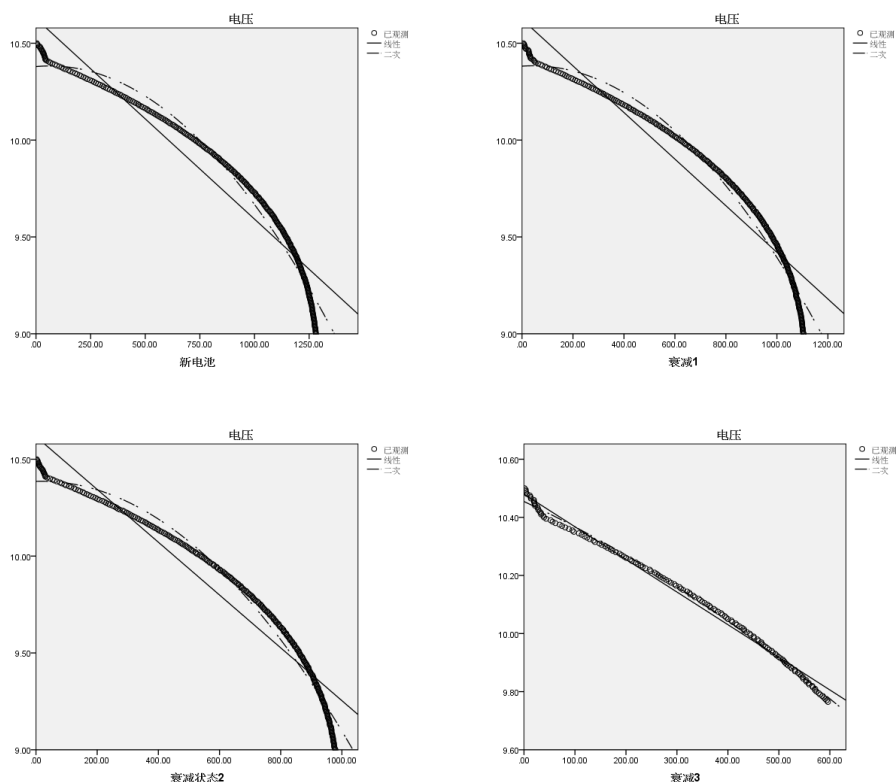


图 3 电压与四种状态的线性回归

由图可以看出电压与其他四种状态存在的线性关系，进一步的检验它们之间的显著性和 R^2 。

表 12 四种状态的显著性与 R^2

	新电池状态	衰减状态 1	衰减状态 2	衰减状态 3
一次 R^2	0.915	0.919	0.924	0.992
Sig	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05
二次 R^2	0.979	0.981	0.983	0.997
Sig	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05

从上表可以知道电压与其他四种状态呈二次关系的 R^2 比呈一次关系的 R^2 高，因此可以建立二次线性回归模型

$$U = a + bx_j + cx_j^2 + \varepsilon \quad (12)$$

运用 *Spss* 进行曲线回归分析，求出待定系数 a 、 b 、 c 如下所示

$$\begin{aligned}
U_0 &= 10.379 + 1.035 \times 10^{-4} x_0 - 8.157 \times 10^{-7} x_0^2 + \varepsilon \\
U_1 &= 10.382 + 9.052 \times 10^{-5} x_1 - 1.078 \times 10^{-6} x_1^2 + \varepsilon \\
U_2 &= 10.386 + 4.841 \times 10^{-5} x_2 - 1.338 \times 10^{-6} x_2^2 + \varepsilon \\
U_3 &= 10.454 + 0.001 x_3 - 5.161 \times 10^{-7} x_3^2 + \varepsilon
\end{aligned} \tag{13}$$

将公式 (13) 和公式 (11) 合并, 如下所示:

$$\begin{aligned}
U_0 &= 10.379 + 1.035 \times 10^{-4} \left(\frac{x_3 + 2.670}{0.612} \right) - 8.157 \times 10^{-7} \left(\frac{x_3 + 2.670}{0.612} \right)^2 + \varepsilon \\
U_1 &= 10.382 + 9.052 \times 10^{-5} \left(\frac{x_3 - 1.854}{0.146} \right) - 1.078 \times 10^{-6} \left(\frac{x_3 - 1.854}{0.146} \right)^2 + \varepsilon \\
U_2 &= 10.386 + 4.841 \times 10^{-5} \left(\frac{x_3 - 0.831}{0.818} \right) - 1.338 \times 10^{-6} \left(\frac{x_3 - 0.831}{0.818} \right)^2 + \varepsilon \\
U_3 &= 10.454 + 0.001 x_3 - 5.161 \times 10^{-7} x_3^2 + \varepsilon
\end{aligned} \tag{14}$$

根据公式 (14) 初步的估算出衰减状态 3 的放电时间, 从而知道 U_2 和 U_3

偏差太大, 因此对其赋予个权重系数公式如下所示:

$$U = \frac{1}{4} (U_1 + 0.522 U_2 + U_3 + 0.428 U_4) + \varepsilon \tag{15}$$

由附件 2 可知, 衰减状态 3 的最后放电时间是 596.2, 运用上述模型可以预测出剩余电池放电时间 (详见附录 3), 该电池衰减状态 3 放电到 U_m 时的放电时间是 790.3, 从而得到衰减状态 3 的剩余放电时间是 194.1min。

综合分析: 在实际生活中, 为了更为准确的对放电时间进行预测, 可以先利用多元回归模型进行分析, 再结合衰减状态作出预测分析, 从而更加完善合理的求出电池剩余房顶时间。

六. 模型的误差分析

(1) 蓄电池产品的实验测量中, 仪器的精密程度, 方法的完善情况, 所得到的实验测量结果往往不同, 产生误差的情况多种多样;

(2) 方法误差, 蓄电池标准允许的参数范围内的公差对试验结果产生影响而造成的误差。

七. 模型的评价

1. 优点

(1) 论文中巧妙运用图形与数据相结合, 将建模思路完整清晰的展现出来, 使其更

有说服力;

(2) 运用多种数学软件 (*Matlab*、*Execl* 和 *Spss*) 进行计算, 使计算结果更加准确可信度更高;

(3) 利用 *Spss* 和 *Matlab* 软件对数据进行处理并作出各种图形, 简便、直观、快捷;

(4) 模型最大的优点在与对源数据进行拟合;

(5) 建立的回归模型能与实际紧密联系, 结合实际情况对问题进行求解, 使得模型具有很好的通用性和推广性。

2. 缺点

模型中计算简便, 使所得结果更理想化, 忽略了一些次要影响因素。

八. 模型的改进

(1) 在问题一中, 还可以采用多次拟合减少误差, 使其准确度更高;

(2) 在问题三中, 可以通过灰色预测。

九. 模型的推广

(1) 在问题一种, 本文所用的线性回归模型不仅使用与求电池剩余放电时间, 还适用于产品销售量的分析以及冠心病与年龄的预测模型等等;

(2) 对电池的剩余放电时间预测模型可用于日光灯寿命预测。

参考文献

- [1] 成梓铭, 国内铅酸蓄电池文献信息[J]. 蓄电池, 2011, 45 (5): 288-288. [2] 韩中庚. 数学建模方法及其应用 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [3] 杨启航, 数学建模, 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [4] 林登, 雷迪, 电池手册 (第三版) [M]. 美国: 化学工业出版社, 2007.
- [5] 姜启源. 数学模型 (第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [6] 庞立斌, 蓄电池剩余电量估计算法的研究与实现[D]. 杭州电子科技大学. 2010.
- [7] 王宏亮, 基于试验的铅酸电池充放电特性模型的建立[J]. 蓄电池, 2005, (01): 38-40.
- [8] 李欣然, 铅酸电池储能系统建模与应用研究[D]. 湖南大学, 2013.
- [9] 郝晓红, 新能源系统储能用铅酸电池使用寿命的影响因素分析[J]. 能源工程, 2012, (04), 10-14.
- [10] 马洪斌, 阀控铅酸蓄电池发展现状[J]. 蓄电池, 2004, B(03): 137-140.

附录

附录 a:

```
y=[11.2179 10.2750    10.2150    10.2636    10.2857    10.2957    10.3014
    10.3036    10.3050    10.3057    10.3050    10.3043    10.3029    10.3014
    10.3000    10.2993    10.2971    10.2950    10.2936    10.2914    10.2893
    10.2871    10.2857    10.2836    10.2814    10.2786    10.2764    10.2743
    10.2721    10.2700    10.2671    10.2650    10.2629    10.2600    10.2579
    10.2550    10.2536    10.2507    10.2479    10.2457    10.2436    10.2407
    10.2386    10.2357    10.2329    10.2307    10.2271    10.2243    10.2221
    10.2193    10.2164    10.2143    10.2114    10.2086    10.2057    10.2029
    10.2000    10.1971    10.1943    10.1914    10.1886    10.1857    10.1829
    10.1807    10.1779    10.1750    10.1721    10.1693    10.1664    10.1636
    10.1607    10.1579    10.1550    10.1521    10.1493    10.1457    10.1436
    10.1407    10.1371    10.1343    10.1314    10.1286    10.1250    10.1221
    10.1193    10.1157    10.1129    10.1100    10.1071    10.1036    10.1000
    10.0971    10.0943    10.0914    10.0879    10.0850    10.0814    10.0793
    10.0757    10.0729    10.0693    10.0657    10.0629    10.0600    10.0564
    10.0536    10.0500    10.0471    10.0436    10.0400    10.0371    10.0336
    10.0300    10.0264    10.0236    10.0200    10.0164    10.0136    10.0093
    10.0064    10.0029    9.9993 9.9957 9.9921 9.9893 9.9857 9.9821 9.9786
    9.9750 9.9714 9.9679 9.9643 9.9614 9.9579 9.9536 9.9507 9.9464 9.9429
    9.9393 9.9357 9.9314 9.9279 9.9243 9.9200 9.9164 9.9129 9.9093 9.9057
    9.9007 9.8971 9.8936 9.8893 9.8857 9.8814 9.8779 9.8736 9.8693 9.8657
    9.8614 9.8579 9.8536 9.8500 9.8457 9.8414 9.8371 9.8329 9.8286 9.8250
    9.8200 9.8157 9.8114 9.8071 9.8029 9.7986 9.7943 9.7893 9.7850 9.7807
    9.7764 9.7721 9.7671 9.7621 9.7579 9.7536 9.7493 9.7443 9.7393 9.7350
    9.7300 9.7250 9.7200 9.7150 9.7100 9.7050 9.7000 9.6950 9.6893 9.6850
    9.6793 9.6743 9.6693 9.6643 9.6586 9.6536 9.6479 9.6429 9.6371 9.6314
    9.6257 9.6200 9.6150 9.6093 9.6029 9.5964 9.5914 9.5850 9.5786 9.5721
    9.5664 9.5600 9.5536 9.5464 9.5407 9.5343 9.5271 9.5207 9.5136 9.5071
    9.5007 9.4929 9.4857 9.4786 9.4714 9.4643 9.4564 9.4493 9.4407 9.4329
    9.4250 9.4164 9.4079 9.3993 9.3914 9.3821 9.3729 9.3636 9.3536 9.3436
    9.3329 9.3229 9.3121 9.3007 9.2893 9.2779 9.2650 9.2529 9.2393 9.2250
    9.2114 9.1957 9.1807 9.1650 9.1479 9.1300 9.1114 9.0914 9.0707 9.0486
    9.0250 9.0000
];
x=[0  2  4  6  8  10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40
    42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80 82
    84 86 88 90 92 94 96 98 100 102 104 106 108 110 112 114 116 118 120 122
    124 126 128 130 132 134 136 138 140 142 144 146 148 150 152 154 156 158 160 162
    164 166 168 170 172 174 176 178 180 182 184 186 188 190 192 194 196 198 200 202
    204 206 208 210 212 214 216 218 220 222 224 226 228 230 232 234 236 238 240 242
```

```

244 246 248 250 252 254 256 258 260 262 264 266 268 270 272 274 276 278 280 282
284 286 288 290 292 294 296 298 300 302 304 306 308 310 312 314 316 318 320 322
324 326 328 330 332 334 336 338 340 342 344 346 348 350 352 354 356 358 360 362
364 366 368 370 372 374 376 378 380 382 384 386 388 390 392 394 396 398 400 402
404 406 408 410 412 414 416 418 420 422 424 426 428 430 432 434 436 438 440 442
444 446 448 450 452 454 456 458 460 462 464 466 468 470 472 474 476 478 480 482
484 486 488 490 492 494 496 498 500 502 504 506 508 510 512 514 516 518 520 522
524 526 528 530 532 534 536 538

];
a=polyfit(x,y,1);
xi=0:2:538;
yi=polyval(a,xi);
plot(x,y,'*')
hold on
plot(xi,yi,'r')
sprintf('直线方程: Y=%0.5gxX+%0.5g',a(1),a(2))

```

附录 b:

```

a=[0  2  4  6  8  10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38
40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80
82 84 86 88 90 92 94 96 98 100 102 104 106 108 110 112 114 116 118 120
122 124 126 128 130 132 134 136 138 140 142 144 146 148 150 152 154 156 158 160
162 164 166 168 170 172 174 176 178 180 182 184 186 188 190 192 194 196 198 200
202 204 206 208 210 212 214 216 218 220 222 224 226 228 230 232 234 236 238 240
242 244 246 248 250 252 254 256 258 260 262 264 266 268 270 272 274 276 278 280
282 284 286 288 290 292 294 296 298 300 302 304 306 308 310 312 314 316 318 320
322 324 326 328 330 332 334 336 338 340 342 344 346 348 350 352 354 356 358 360
362 364 366 368 370 372 374 376 378 380 382 384 386 388 390 392 394 396 398 400
402 404 406 408 410 412 414 416 418 420 422 424 426 428 430 432 434 436 438 440
442 444 446 448 450 452 454 456 458 460 462 464 466 468 470 472 474 476 478 480
482 484 486 488 490 492 494 496 498 500 502 504 506 508 510 512 514 516 518 520
522 524 526 528 530 532 534 536 538 540 542 544 546 548 550 552 554 556 558 560
562 564 566 568 570 572 574 576 578 580 582 584 586 588 590 592 594 596 598 600
602 604 606 608 610 612 614 616 618 620 622 624 626 628 630 632 634 636 638 640
642 644 646 648 650 652 654 656 658 660 662 664 666 668 670 672 674 676 678 680
682 684 686 688 690 692 694 696 698 700 702 704 706 708 710 712 714 716 718 720
722 724 726 728 730 732 734 736 738 740 742 744 746 748 750 752 754 756 758 760
762 764 766 768 770 772 774 776 778 780 782 784 786 788 790 792 794 796 798 800
802 804 806 808 810 812 814 816 818 820 822 824 826 828 830 832 834 836 838 840
842 844 846 848 850 852 854 856 858 860 862 864 866 868 870 872 874 876 878 880
882 884 886 888 890 892 894 896 898 900 902 904 906 908 910 912 914 916 918 920
922 924 926 928 930 932 934 936 938 940 942 944 946 948 950 952 954 956 958 960
962 964 966 968 970 972 974 976 978 980 982 984 986 988 990 992 994 996 998 1000
1002  1004  1006  1008  1010  1012  1014  1016  1018  1020
1022  1024  1026  1028  1030  1032  1034  1036  1038  1040

```

1042 1044 1046 1048 1050 1052 1054 1056 1058 1060
1062 1064 1066 1068 1070 1072 1074 1076 1078 1080
1082 1084 1086 1088 1090 1092 1094 1096 1098 1100
1102 1104 1106 1108 1110 1112 1114 1116 1118 1120
1122 1124 1126 1128 1130 1132 1134 1136 1138 1140
1142 1144 1146 1148 1150 1152 1154 1156 1158 1160
1162 1164 1166 1168 1170 1172 1174 1176 1178 1180
1182 1184 1186 1188 1190 1192 1194 1196 1198 1200
1202 1204 1206 1208 1210 1212 1214 1216 1218 1220
1222 1224 1226 1228 1230 1232 1234 1236 1238

];

b=[10.18830138 10.18729989 10.18629544 10.18528802 10.18427763 10.18326428
10.18224795 10.18122866 10.1802064 10.17918117 10.17815298 10.17712181
10.17608768 10.17505058 10.17401051 10.17296748 10.17192147 10.1708725
10.16982056 10.16876565 10.16770778 10.16664693 10.16558312 10.16451634
10.16344659 10.16237388 10.16129819 10.16021954 10.15913792 10.15805333
10.15696578 10.15587525 10.15478176 10.1536853 10.15258587 10.15148348
10.15037811 10.14926978 10.14815848 10.14704421 10.14592698 10.14480677
10.1436836 10.14255746 10.14142835 10.14029628 10.13916123 10.13802322
10.13688224 10.13573829 10.13459138 10.13344149 10.13228864 10.13113282
10.12997403 10.12881228 10.12764755 10.12647986 10.1253092 10.12413557
10.12295898 10.12177941 10.12059688 10.11941138 10.11822291 10.11703148
10.11583707 10.1146397 10.11343936 10.11223605 10.11102978 10.10982053
10.10860832 10.10739314 10.10617499 10.10495388 10.10372979 10.10250274
10.10127272 10.10003973 10.09880378 10.09756485 10.09632296 10.0950781
10.09383027 10.09257948 10.09132571 10.09006898 10.08880928 10.08754661
10.08628098 10.08501237 10.0837408 10.08246626 10.08118875 10.07990828
10.07862483 10.07733842 10.07604904 10.07475669 10.07346138 10.07216309
10.07086184 10.06955762 10.06825043 10.06694028 10.06562715 10.06431106
10.062992 10.06166997 10.06034498 10.05901701 10.05768608 10.05635218
10.05501531 10.05367548 10.05233267 10.0509869 10.04963816 10.04828645
10.04693178 10.04557413 10.04421352 10.04284994 10.04148339 10.04011388
10.03874139 10.03736594 10.03598752 10.03460613 10.03322178 10.03183445
10.03044416 10.0290509 10.02765467 10.02625548 10.02485331 10.02344818
10.02204008 10.02062901 10.01921498 10.01779797 10.016378 10.01495506
10.01352915 10.01210028 10.01066843 10.00923362 10.00779584 10.00635509
10.00491138 10.00346469 10.00201504 10.00056242 9.999106831 9.997648275
9.996186751 9.994722259 9.993254799 9.991784371 9.990310975 9.988834611
9.987355279 9.985872979 9.984387711 9.982899475 9.981408271 9.979914099
9.978416959 9.976916851 9.975413775 9.973907731 9.972398719 9.970886739
9.969371791 9.967853875 9.966332991 9.964809139 9.963282319 9.961752531
9.960219775 9.958684051 9.957145359 9.955603699 9.954059071 9.952511475
9.950960911 9.949407379 9.947850879 9.946291411 9.944728975 9.943163571
9.941595199 9.940023859 9.938449551 9.936872275 9.935292031 9.933708819
9.932122639 9.930533491 9.928941375 9.927346291 9.925748239 9.924147219

9.922543231 9.920936275 9.919326351 9.917713459 9.916097599 9.914478771
9.912856975 9.911232211 9.909604479 9.907973779 9.906340111 9.904703475
9.903063871 9.901421299 9.899775759 9.898127251 9.896475775 9.894821331
9.893163919 9.891503539 9.889840191 9.888173875 9.886504591 9.884832339
9.883157119 9.881478931 9.879797775 9.878113651 9.876426559 9.874736499
9.873043471 9.871347475 9.869648511 9.867946579 9.866241679 9.864533811
9.862822975 9.861109171 9.859392399 9.857672659 9.855949951 9.854224275
9.852495631 9.850764019 9.849029439 9.847291891 9.845551375 9.843807891
9.842061439 9.840312019 9.838559631 9.836804275 9.835045951 9.833284659
9.831520399 9.829753171 9.827982975 9.826209811 9.824433679 9.822654579
9.820872511 9.819087475 9.817299471 9.815508499 9.813714559 9.811917651
9.810117775 9.808314931 9.806509119 9.804700339 9.802888591 9.801073875
9.799256191 9.797435539 9.795611919 9.793785331 9.791955775 9.790123251
9.788287759 9.786449299 9.784607871 9.782763475 9.780916111 9.779065779
9.777212479 9.775356211 9.773496975 9.771634771 9.769769599 9.767901459
9.766030351 9.764156275 9.762279231 9.760399219 9.758516239 9.756630291
9.754741375 9.752849491 9.750954639 9.749056819 9.747156031 9.745252275
9.743345551 9.741435859 9.739523199 9.737607571 9.735688975 9.733767411
9.731842879 9.729915379 9.727984911 9.726051475 9.724115071 9.722175699
9.720233359 9.718288051 9.716339775 9.714388531 9.712434319 9.710477139
9.708516991 9.706553875 9.704587791 9.702618739 9.700646719 9.698671731
9.696693775 9.694712851 9.692728959 9.690742099 9.688752271 9.686759475
9.684763711 9.682764979 9.680763279 9.678758611 9.676750975 9.674740371
9.672726799 9.670710259 9.668690751 9.666668275 9.664642831 9.662614419
9.660583039 9.658548691 9.656511375 9.654471091 9.652427839 9.650381619
9.648332431 9.646280275 9.644225151 9.642167059 9.640105999 9.638041971
9.635974975 9.633905011 9.631832079 9.629756179 9.627677311 9.625595475
9.623510671 9.621422899 9.619332159 9.617238451 9.615141775 9.613042131
9.610939519 9.608833939 9.606725391 9.604613875 9.602499391 9.600381939
9.598261519 9.596138131 9.594011775 9.591882451 9.589750159 9.587614899
9.585476671 9.583335475 9.581191311 9.579044179 9.576894079 9.574741011
9.572584975 9.570425971 9.568263999 9.566099059 9.563931151 9.561760275
9.559586431 9.557409619 9.555229839 9.553047091 9.550861375 9.548672691
9.546481039 9.544286419 9.542088831 9.539888275 9.537684751 9.535478259
9.533268799 9.531056371 9.528840975 9.526622611 9.524401279 9.522176979
9.519949711 9.517719475 9.515486271 9.513250099 9.511010959 9.508768851
9.506523775 9.504275731 9.502024719 9.499770739 9.497513791 9.495253875
9.492990991 9.490725139 9.488456319 9.486184531 9.483909775 9.481632051
9.479351359 9.477067699 9.474781071 9.472491475 9.470198911 9.467903379
9.465604879 9.463303411 9.460998975 9.458691571 9.456381199 9.454067859
9.451751551 9.449432275 9.447110031 9.444784819 9.442456639 9.440125491
9.437791375 9.435454291 9.433114239 9.430771219 9.428425231 9.426076275
9.423724351 9.421369459 9.419011599 9.416650771 9.414286975 9.411920211
9.409550479 9.407177779 9.404802111 9.402423475 9.400041871 9.397657299
9.395269759 9.392879251 9.390485775 9.388089331 9.385689919 9.383287539

```

9.380882191 9.378473875 9.376062591 9.373648339 9.371231119 9.368810931
9.366387775 9.363961651 9.361532559 9.359100499 9.356665471 9.354227475
9.351786511 9.349342579 9.346895679 9.344445811 9.341992975 9.339537171
9.337078399 9.334616659 9.332151951 9.329684275 9.327213631 9.324740019
9.322263439 9.319783891 9.317301375 9.314815891 9.312327439 9.309836019
9.307341631 9.304844275 9.302343951 9.299840659 9.297334399 9.294825171
9.292312975 9.289797811 9.287279679 9.284758579 9.282234511 9.279707475
9.277177471 9.274644499 9.272108559 9.269569651 9.267027775 9.264482931
9.261935119 9.259384339 9.256830591 9.254273875 9.251714191 9.249151539
9.246585919 9.244017331 9.241445775 9.238871251 9.236293759 9.233713299
9.231129871 9.228543475 9.225954111 9.223361779 9.220766479 9.218168211
9.215566975 9.212962771 9.210355599 9.207745459 9.205132351 9.202516275
9.199897231 9.197275219 9.194650239 9.192022291 9.189391375 9.186757491
9.184120639 9.181480819 9.178838031 9.176192275 9.173543551 9.170891859
9.168237199 9.165579571 9.162918975 9.160255411 9.157588879 9.154919379
9.152246911 9.149571475 9.146893071 9.144211699 9.141527359 9.138840051
9.136149775 9.133456531 9.130760319 9.128061139 9.125358991 9.122653875
9.119945791 9.117234739 9.114520719 9.111803731 9.109083775 9.106360851
9.103634959 9.100906099 9.098174271 9.095439475 9.092701711 9.089960979
9.087217279 9.084470611 9.081720975 9.078968371 9.076212799 9.073454259
9.070692751 9.067928275 9.065160831 9.062390419 9.059617039 9.056840691
9.054061375 9.051279091 9.048493839 9.045705619 9.042914431 9.040120275
9.037323151 9.034523059 9.031719999 9.028913971 9.026104975 9.023293011
9.020478079 9.017660179 9.014839311 9.012015475 9.009188671 9.006358899
9.003526159 9.000690451
];
plot(a,b, 'm*')
axis([0 1300 9 10.2])
hold on
plot(a,b, 'k')

```