



# 预备知识

(第0章)



# 第0章 预备知识

## 0.3 函数

- 0.3.1 函数及其性质
- 0.3.2 初等函数

## 0.3.1 函数及其性质

### 一、预备知识

#### 1、常量与变量

例：圆的面积公式  $S = \pi r^2 (\pi = 3.14)$

变化 不变 变化

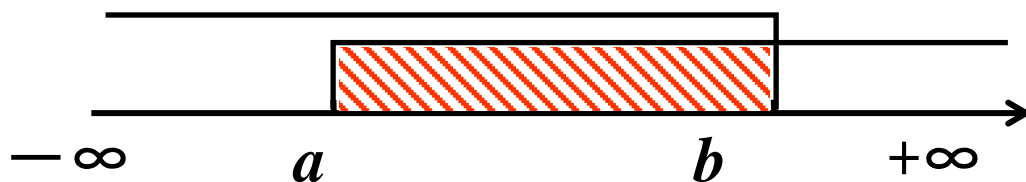
**常量**：一定的、不变的量，用 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 等表示

**变量**：变化的量，用 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ 、 $u$ 、 $v$ 等表示

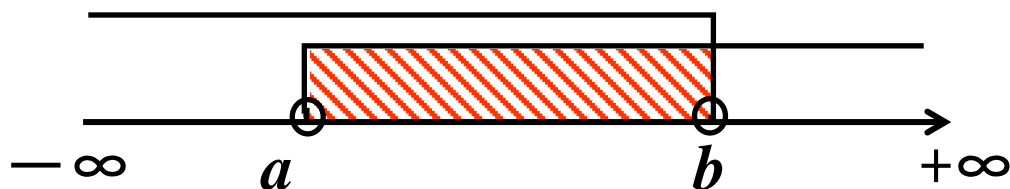
**变量的变动区域**：变量的取值范围，一般用区间来表示。

## 2. 有限区间

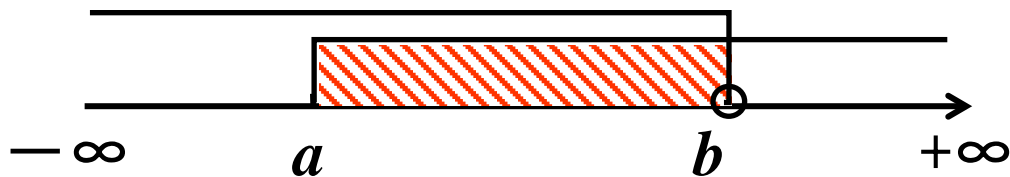
(1) 闭区间 $[a, b]$ : 大于等于 $a$  且 小于等于 $b$  的数集 (包括端点)



(2) 开区间 $(a, b)$ : 大于 $a$  且 小于 $b$  的数集 (不包括端点)



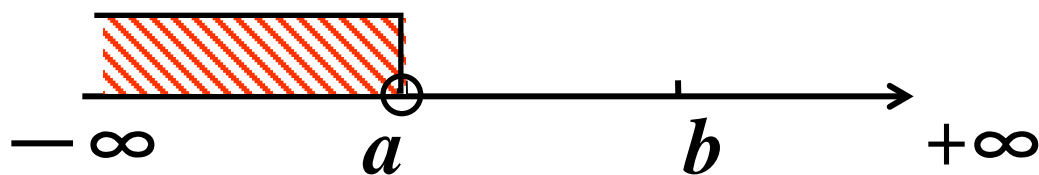
(3) 半开半闭区间 $[a, b)$ : 大于等于 $a$  且 小于 $b$  的数集



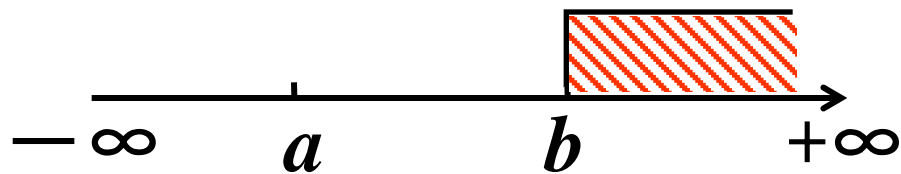
### 3、无限区间

**R:**  $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数

$(-\infty, a)$ 表示小于 $a$ 的数集



$[b, +\infty)$ 表示大于等于 $b$ 的数集



## 二、函数的概念

定义1 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个非空实数集.

如果对于数集  $D$  中的每一个数  $x$ , 按照一定的对应法则  $f$ , 都有惟一确定的实数  $y$  与之对应, 则称  $y$  是定义在数集  $D$  上的  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

自变量

因变量

对应法则

其中  $D$  称为函数的定义域,  $x$  称为自变量,  $y$  称为函数 (或因变量) .

## 说明:

(1) “函数”表达了因变量与自变量的一种对应规则，这种对应规则用字母“ $f$ ”来表示. 因此  $f$  是一个函数符号， $y = f(x)$  绝不意味着“ $y$  等于  $f$  乘以  $x$ ”.

## (2) 对应规则 $f$

$f$  表示对应规则的抽象符号

常用:  $y = g(x)$ 、 $s = f(r)$

(3) 定义域  $D$ : 使函数关系有意义的自变量  $x$  的取值范围

## ▲求定义域时要注意几种式子:

① 分式 (分母含有变量的式子) — 分母不为0

例:  $y = \frac{x}{2}$  和  $y = \frac{2}{x}$  哪个是分式?

例: 已知  $y = \frac{1+x}{1-x}$ , 求  $D$

解:  $\because 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \quad \therefore D : (-\infty, 1)(1, +\infty)$

② 偶次根式 (根指数是偶数的根式)

— 被开方式大于等于0

如:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[4]{x+1}$ ,  $y = \sqrt[8]{x^2+3x-1}$

### ③ 对数式 — 真数大于0

如:  $y = \log_a \textcircled{x}$  — 真数

$y = \ln x$  (自然对数),  $y = \lg x$  (常用对数)

例: 已知  $y = \ln(x - 2)$ , 求  $D$

解:  $\because x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\therefore D : (2, +\infty)$

### ④ 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 和反余弦函数 $y = \arccos x$

— 函数中的式子要大于等于-1且小于等于1

## ⑤ 表达式由若干个式子组成

### —各个定义域的公共部分

例：已知  $y = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \ln(x - 2)$ ，求  $D$

解：  $\therefore \begin{cases} 3 + 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x > 2 \end{cases} \quad \therefore D : (2, 3]$$

(4)函数的两要素：定义域和对应规律

(5) 函数值：当 $x = x_0$ 时， $y$ 按照函数关系 $y = f(x)$

所求出的对应的值 $y_0$ ，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$

▲把 $x_0$ 代入原式中 $x$ 的位置， $x_0$ 可以是常数或式子

例 设 $y = f(x) = x^3 - 2x + 3$ ，求 $f(1)$ 、 $f(t^2)$

解：  $y|_{x=1} = f(1) = 2$

$y|_{x=t^2} = f(t^2) = (t^2)^3 - 2 \cdot t^2 + 3 = t^6 - 2t^2 + 3$

## 堂上练习:

### 1、求函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{3-2x}$$

$$(2) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(1) \text{ 解: } \because 3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \geq x \quad \text{即 } x \leq \frac{3}{2} \quad \therefore D : (-\infty, \frac{3}{2}]$$

$$(2) \text{ 解: } \because x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 1, \quad x \neq 2$$

$$\therefore (-\infty, 1)(1, 2)(2, +\infty)$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \sqrt{4 + x^2},$$

$$\text{求 } f(0), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0 + h)$$

$$\text{解: } f(0) = \sqrt{4 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2 + 1}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{4a^2 + 1}$$

$$f(x_0) = \sqrt{4 + (x_0)^2}$$

$$f(x_0 + h) = \sqrt{4 + (x_0 + h)^2}$$

### 三、函数的表示法

**解析法（公式法）**：用表达式表示的函数方法。

**列表法**：将自变量的取值与对应的函数值列成表的形式。

**图像法**：将列表法的各对对应值作为坐标，在坐标系中描绘出来，必要时用曲线连结，用来反映变量的对应关系。

**注（数学方法与学习方法）**：综合运用上述方法分析研究问题、解决处理问题、解释理解概念等方法，数学上称为“数形结合”，学习微积分要学会运用这种方法。

## 四、分段函数

1、**定义**：在不同的定义区间内，用不同的解析式来表示的函数

$$\text{如： } y = \begin{cases} x^2 & , x > 1 \\ 1-x & , x < 1 \end{cases} \quad y = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

2、**定义域D** — 各个定义区间的总和（并集）

3、**函数值**

**方法**：先判断所求的点属于哪个定义区间，再把点代入这个区间所对应的函数关系式中求出函数值

## 五、反函数

例：已知 $y = 4x - 1$ ，求用 $y$ 来表示 $x$ 的式子

解： $\because y = 4x - 1 \Rightarrow y + 1 = 4x \Rightarrow \frac{y + 1}{4} = x$

$\therefore$  所求的式子为  $x = \frac{y + 1}{4}$

★称 $x = \frac{y + 1}{4}$ 是 $y = 4x - 1$ 的反函数

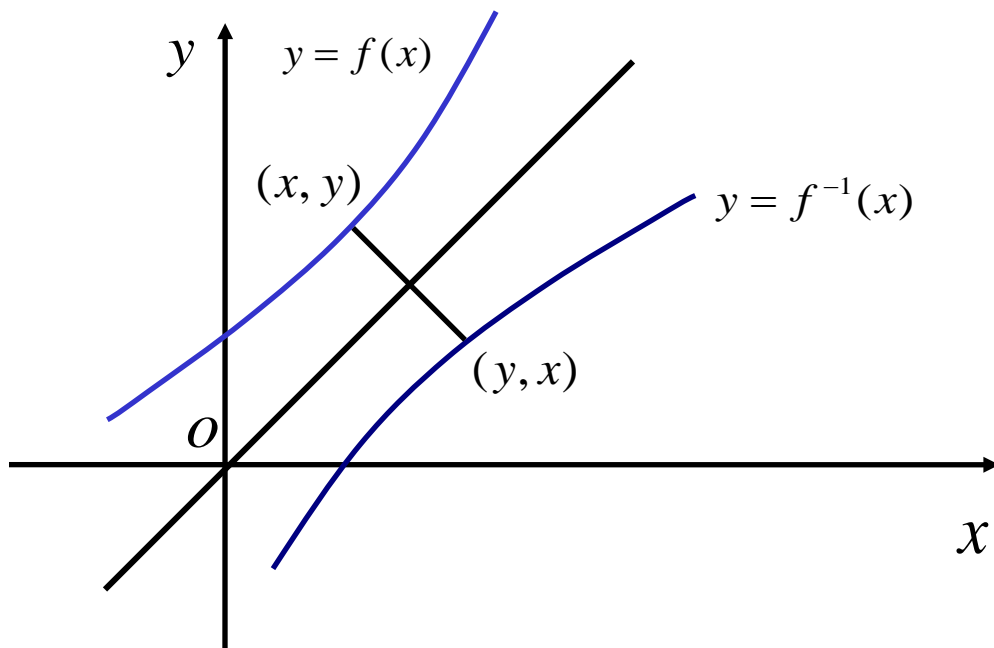
定义：已知 $y = f(x)$ ，用 $y$ 来表示 $x$ 的式子称作 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$

函数 $y = f(x)$ , 自变量 $x$ , 因变量 $y$ , 定义域 $D$ , 值域 $M$

函数 $y = f^{-1}(x)$ , 自变量 $y$ , 因变量 $x$ , 定义域 $M$ , 值域 $D$

习惯上,  $x$ 、 $y$ 互换, 即 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数

从图像上来看,  $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 关于直线 $y = x$ 对称



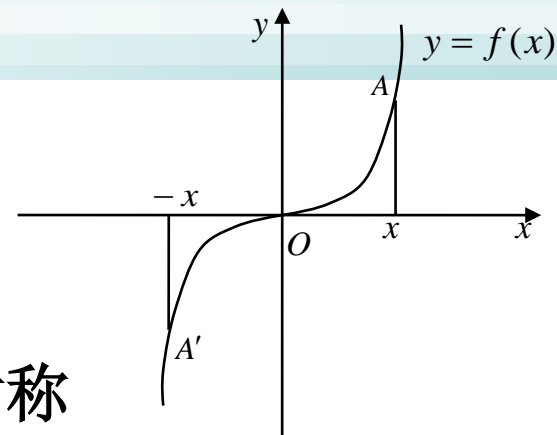
# 六、函数的几种特性

## 1、奇偶性

(1)偶函数:  $f(-x)=f(x)$ , 图像关于y轴对称

(2)奇函数:  $f(-x)=-f(x)$ , 图像关于原点对称

(3)非奇非偶函数:  $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$



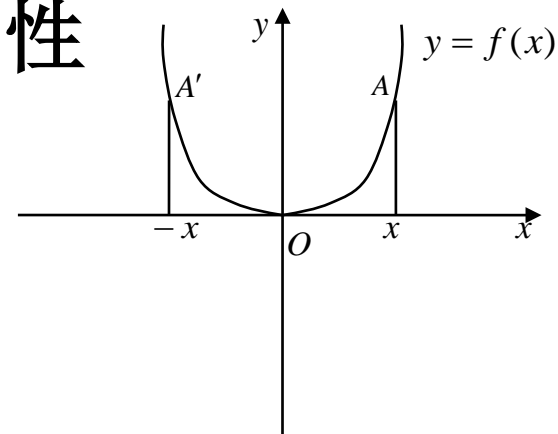
奇函数

例: 判别 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ 的奇偶性

$$\text{解: } \because f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7$$

$$= 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$$

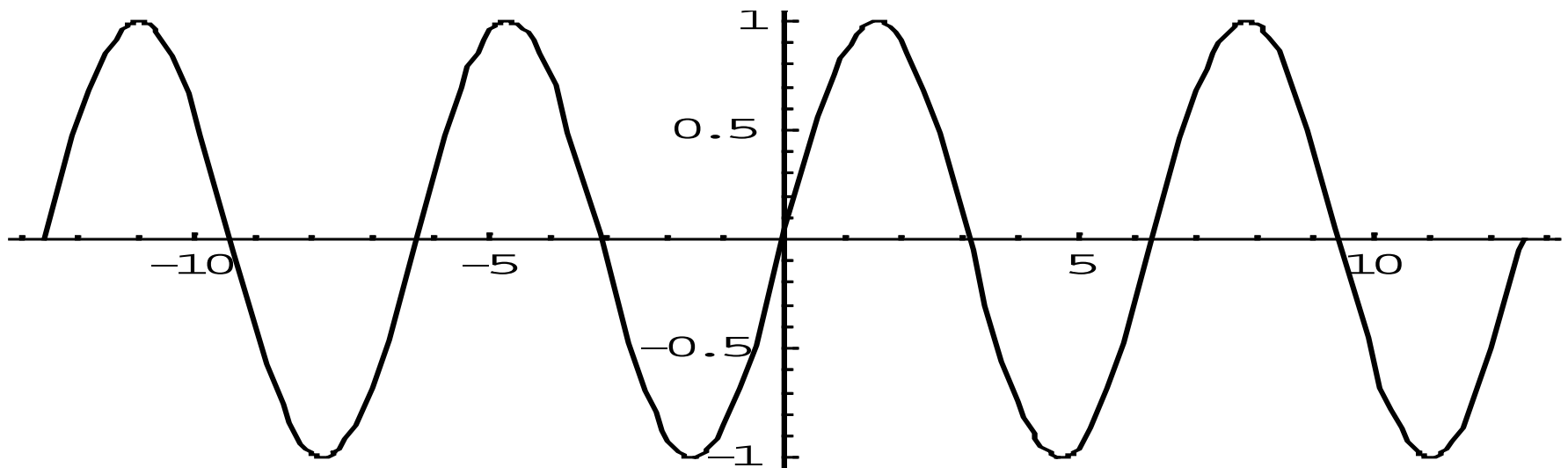
$\therefore f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ 是偶函数



偶函数

## 2、周期性

对于函数 $y = f(x)$ ，若存在一个常数 $T \neq 0$ ，使得对于 $\forall x \in D$ ，必有 $x \pm T \in D$ ，且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为**周期函数**，其中 $T$ 叫做 $f(x)$ 的周期



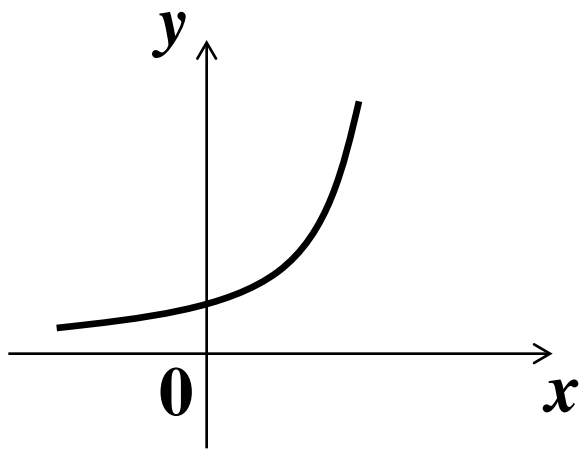
使用 $Mathematica$ 所画的正弦函数

### 3、单调性

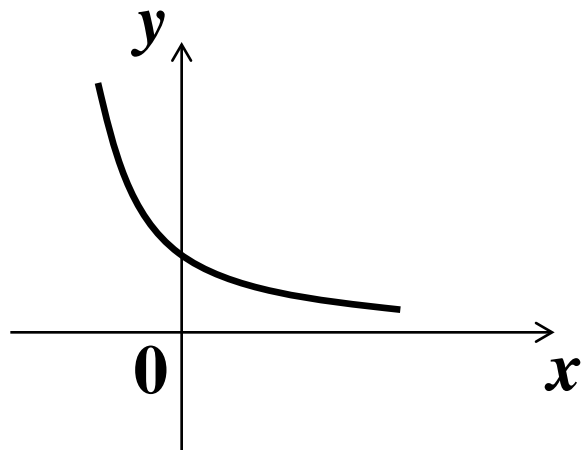
(1)单调增函数：随着 $x$ 的增加，函数值 $y$ 不断增加

(2)单调减函数：随着 $x$ 的增加，函数值 $y$ 不断减少

单调增函数



单调减函数

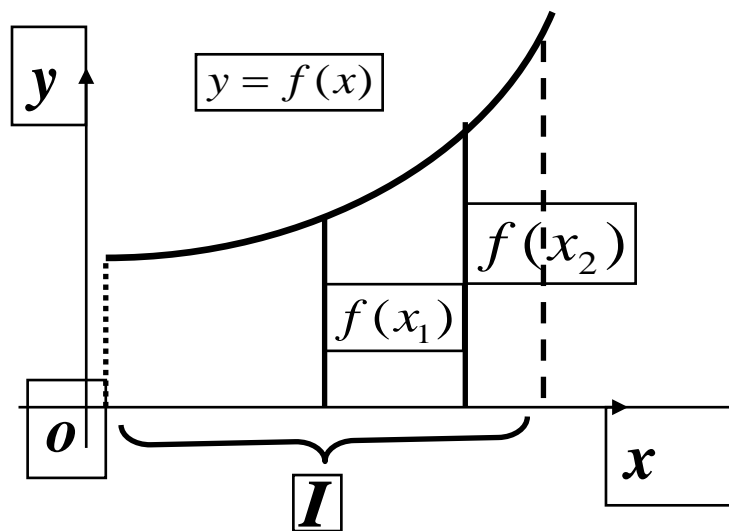


# 单调性的描述

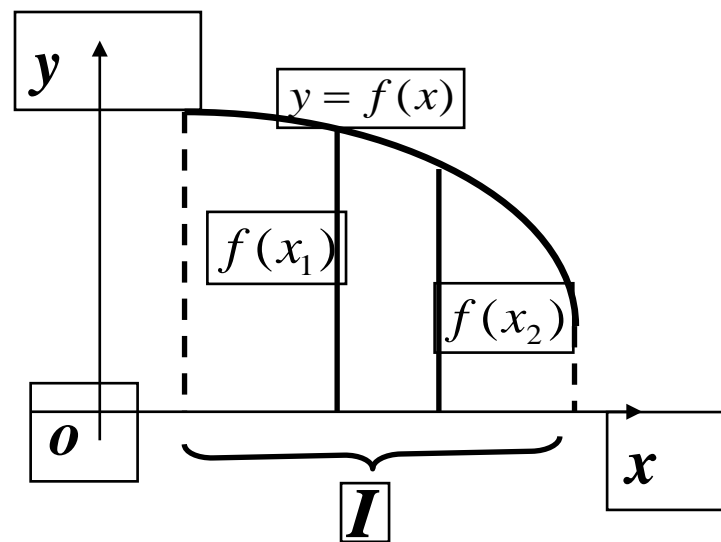
如果函数 $y = f(x)$ 对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 、 $x_2$ ,

当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称此函数在 $I$ 上单调增加,  
 $I$ 叫做单调增区间

当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称此函数在 $I$ 上单调减少,  
 $I$ 叫做单调减区间



增函数

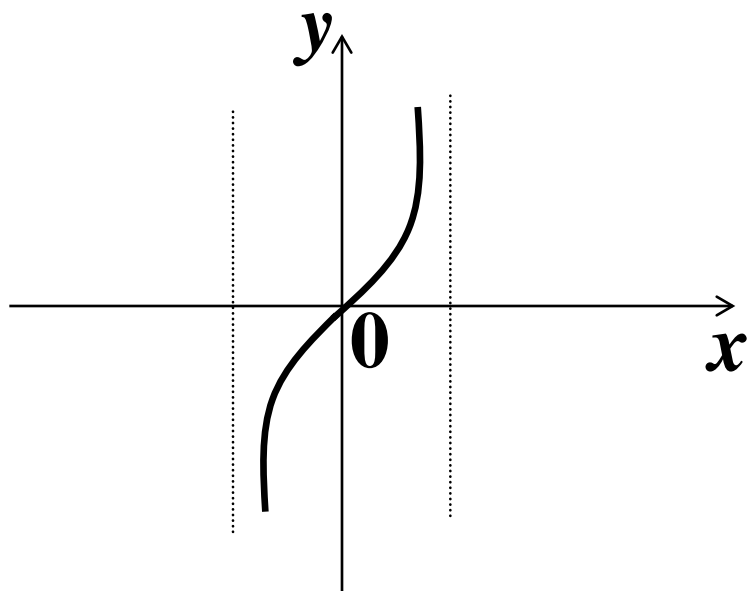


减函数

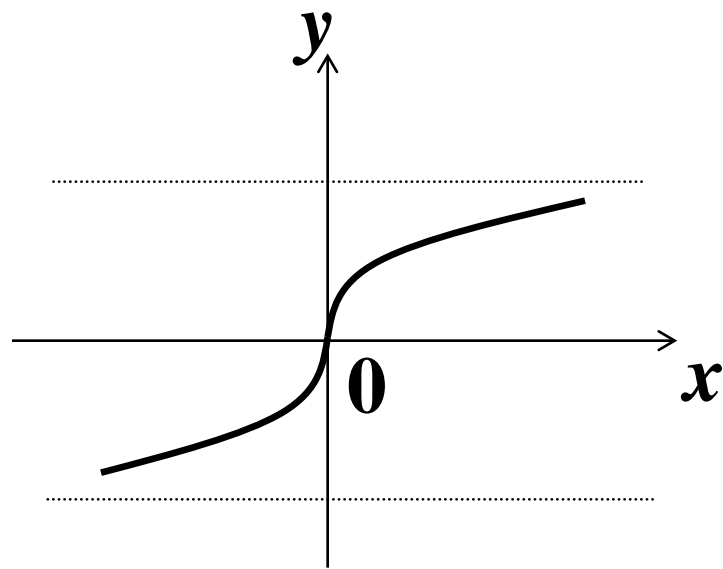
## 4、有界性

有界函数： $|f(x)| \leq M$  即  $-M \leq y \leq M$

例：下面哪个是有界函数？



无界



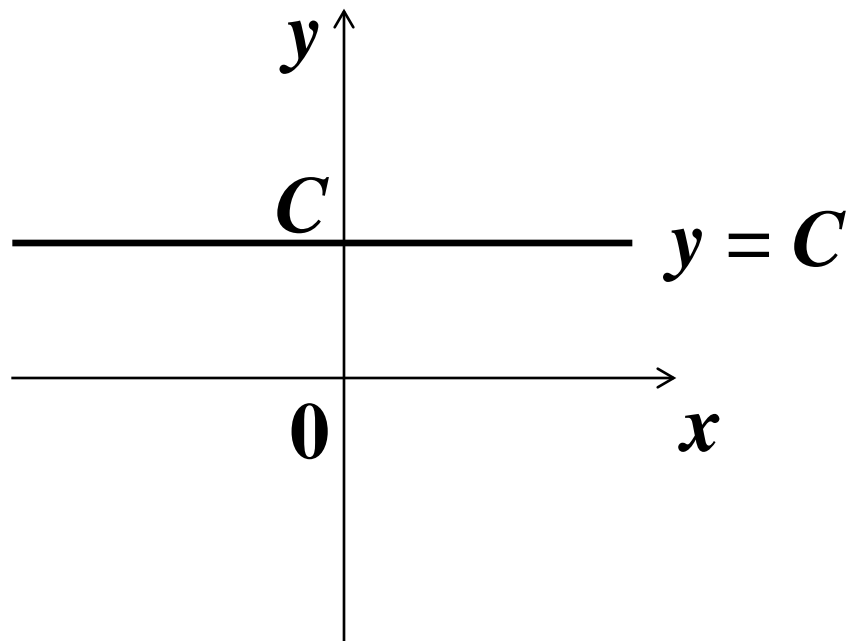
有界

## 七、基本初等函数

### 1、常函数 $y = C$ ( $C \in \mathbf{R}$ )

如：  $y = 2$ 、  $y = 5$ 等

图像为经过点  $(0, C)$  且平行于 $x$ 轴的直线

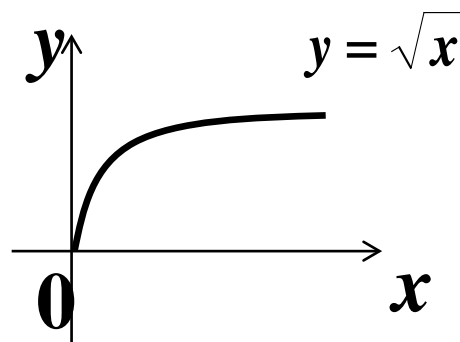
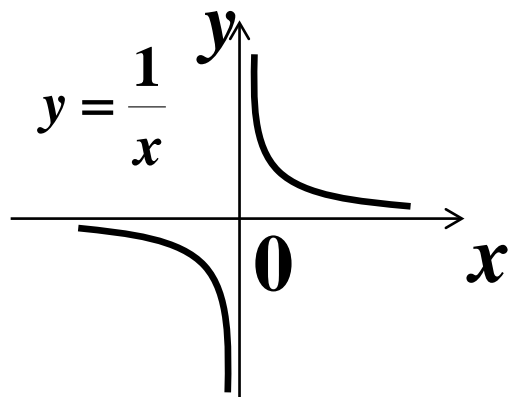
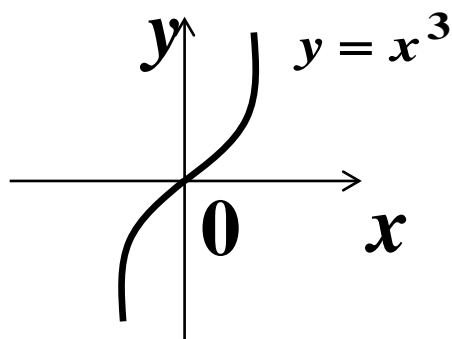
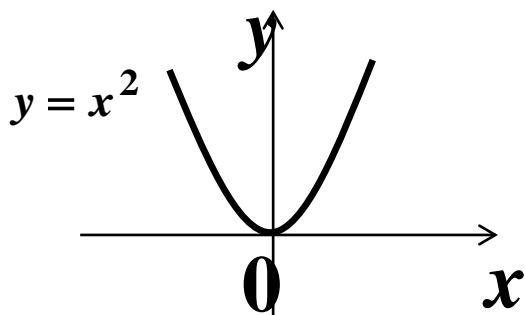


## 2、幂函数 $y = x^a (a \in R)$ 指数 $a$ 是常数

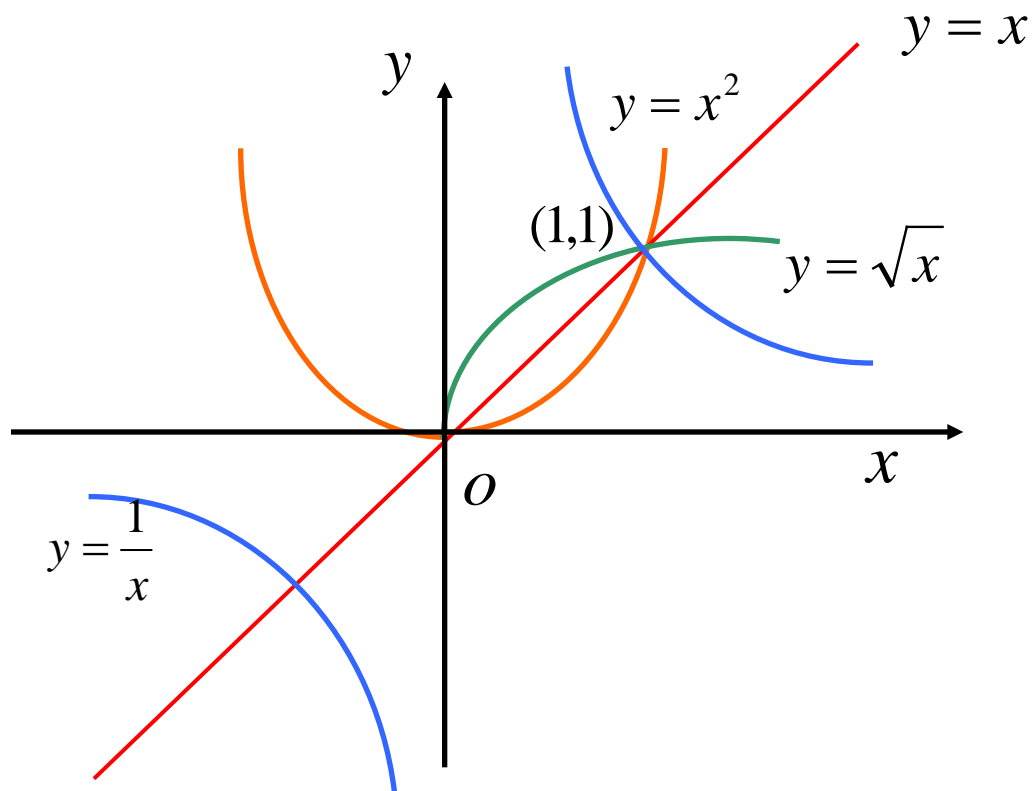
常用幂函数:  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ,

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

▲根式和分子为1的分式都可以用幂函数来表示



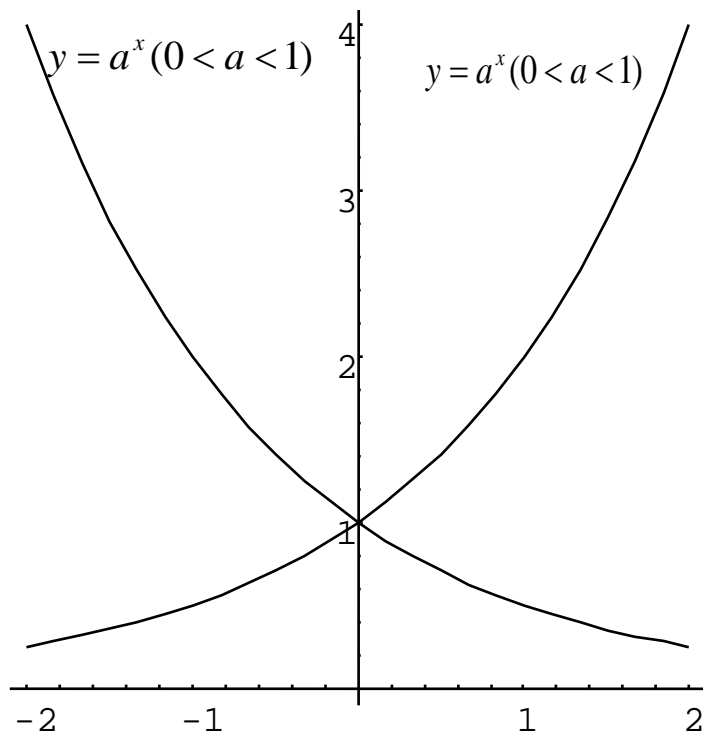
## 幂函数 $y = x^a$ ( $a \neq 0$ )



随着  $a$  而不同，但在  $(0, +\infty)$  中都有定义；经过点  $(1, 1)$ ，  
在  $(0, +\infty)$  内当  $a > 0$  时， $x^a$  为增函数； $a < 0$  时， $x^a$  为减函数

### 3、指数函数 $y = a^x$ ( $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ) 指数 $x$ 是变量

如:  $y = 2^x$



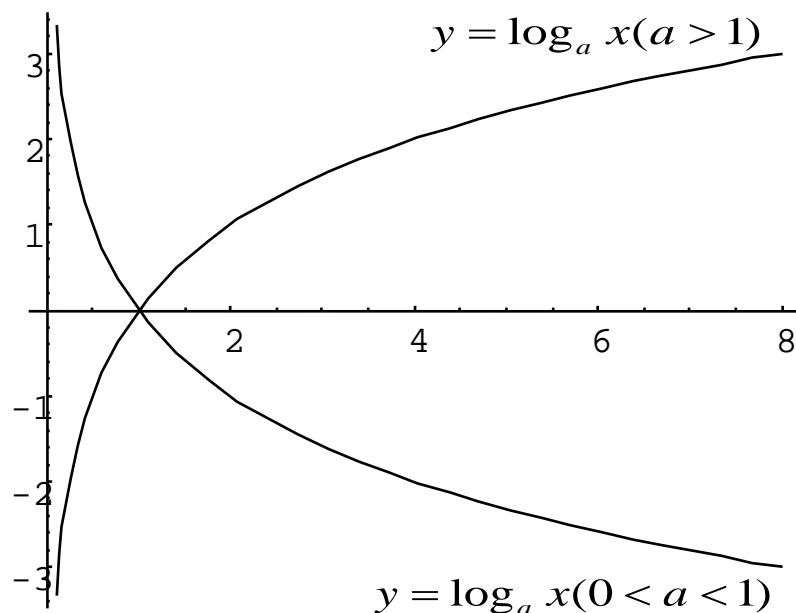
图形在 $x$ 轴上方, 且都过点 $(0,1)$ 。

当 $0 < a < 1$ 时,  $a^x$ 为减函数; 当 $a > 1$ 时,  $a^x$ 为增函数

## 4、对数函数 $y = \log_a x$ ( $a > 0$ 且 $a \neq 1$ )

常用对数:  $y = \lg x$  ( $a=10$ ) ,

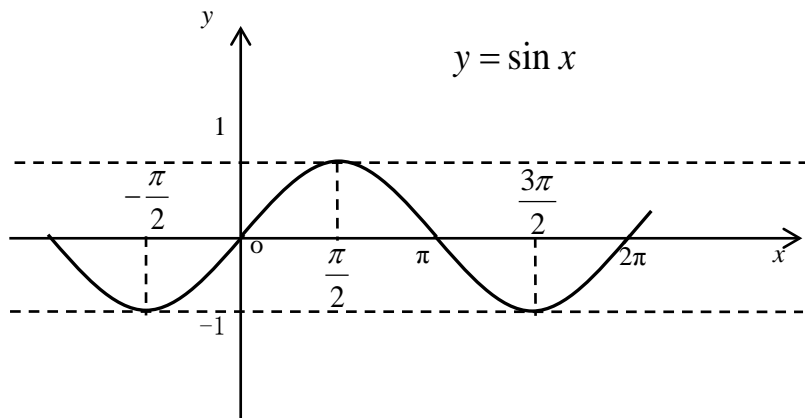
自然对数:  $y = \ln x$  ( $a = e = 2.718$ )



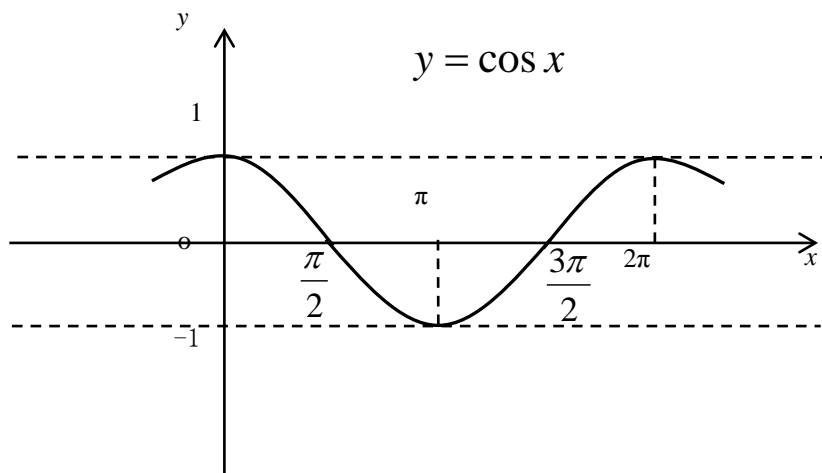
图像在y轴右侧，且过点(1,0)

当 $a > 1$ 时， $y = \log_a x$ 为增函数；当时， $y = \log_a x$ 为减函数

## 5、三角函数

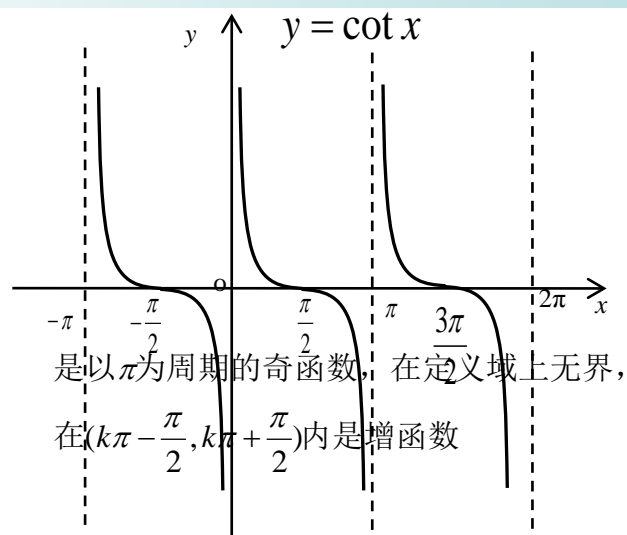
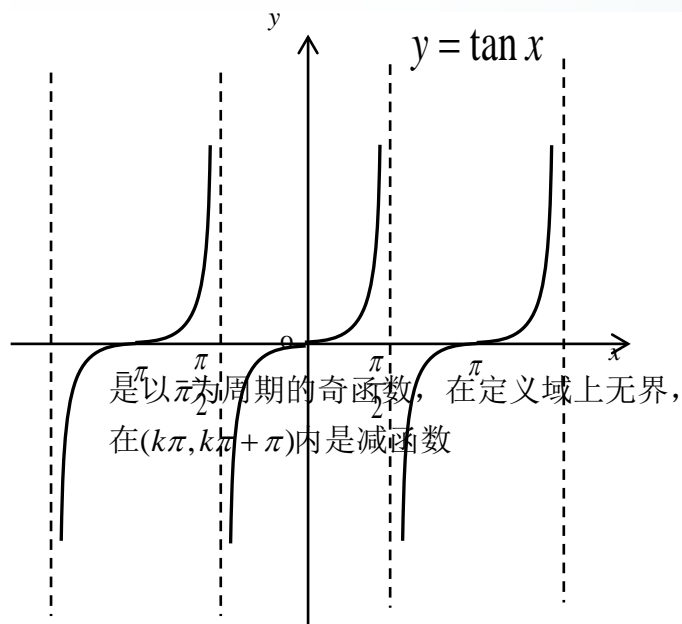


是以 $2\pi$ 为周期的奇函数，  
且下界为 $y = -1$ ，上界为 $y = 1$



是以 $2\pi$ 为周期的偶函数，  
且下界为 $y = -1$ ，上界为 $y = 1$

# 正切函数和余切函数



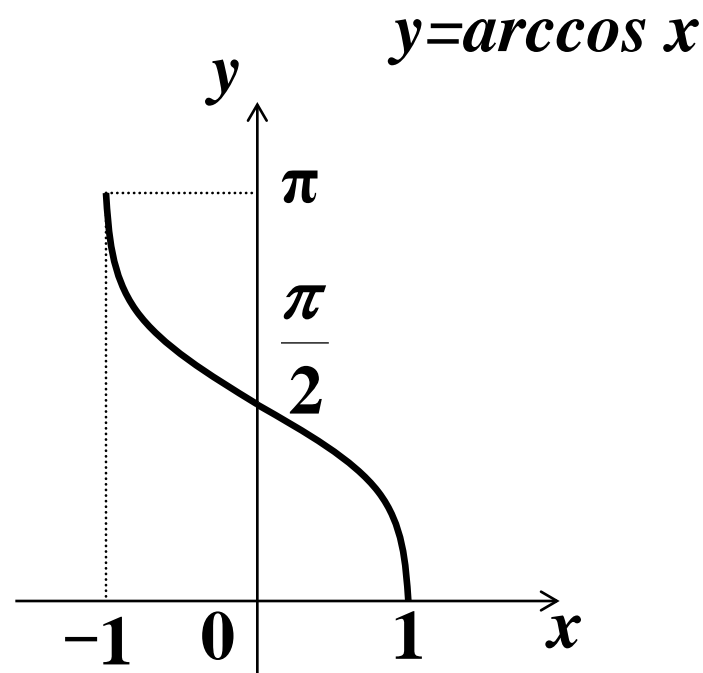
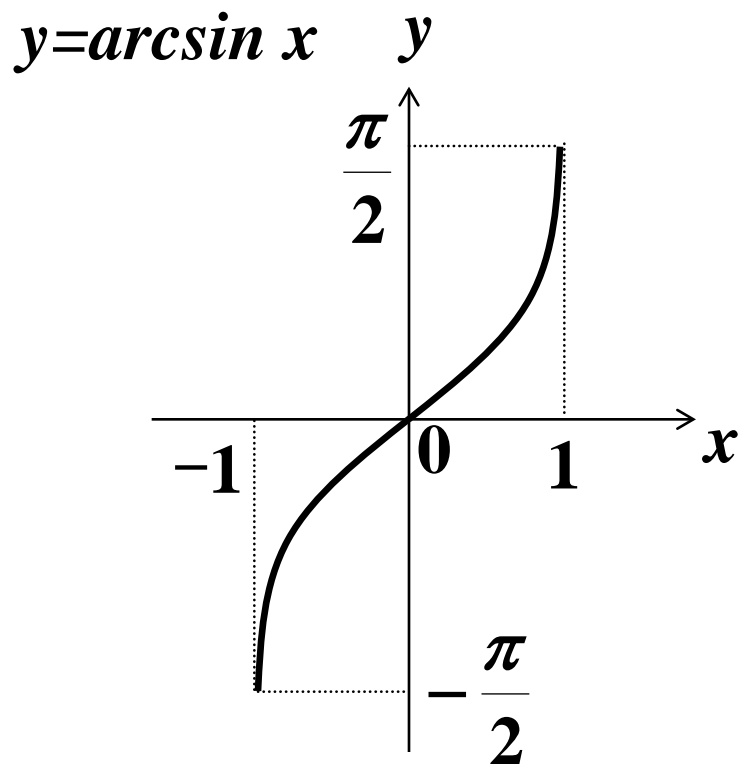
# 正割函数和余割函数

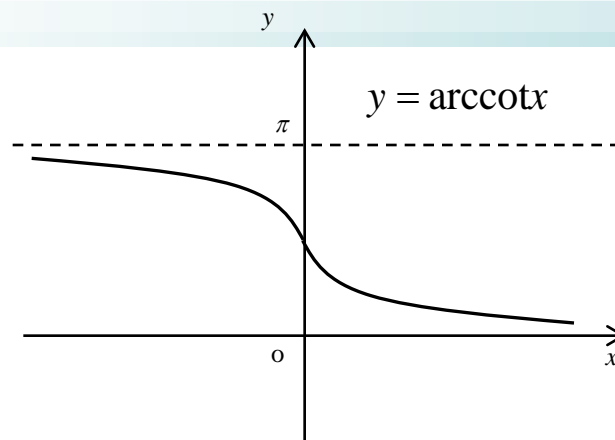
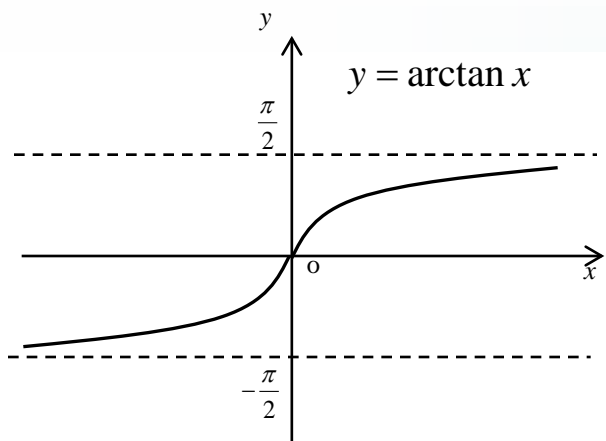
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

## 6、反三角函数

### ▲反三角函数是三角函数的反函数





反三角函数	定义域	值域	有界性	奇偶性	单调性
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	有界	奇函数	单调递增
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	有界	无	单调递减
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	有界	奇函数	单调递增
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	有界	无	单调递减

## 求反三角函数的值

例:  $\arcsin(1/2) = \pi/6$

$\arcsin 1 = \pi/2$

例:  $\arccos(1/2) = \pi/3$

$\arccos 1 = 0$

例:  $\arctan 0 = 0$

$\arctan 1 = \pi/4$

例:  $\operatorname{arccot} 0 = \pi/2$

$\operatorname{arccot} 1 = \pi/4$

练习:  $\arcsin 0, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos 0, \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{2},$   
 $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}, \arctan \sqrt{3}, \arctan 1, \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{arccot} \sqrt{3}, \operatorname{arccot} 1,$

# 基本初等函数

一、常函数  $y = C$

二、幂函数  $y = x^{\alpha}$  ( $\alpha$ 为实常数)

例:  $y = x^3$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}}$  注意其他形式

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \frac{1}{x^5}, \quad y = \sqrt{x}$$

三、指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

例:  $y = 3^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

四、对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

五、三角函数

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$

$$y = \tan x, \quad y = \cot x,$$

$$y = \sec x, \quad y = \csc x,$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

六、反三角函数

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x,$$

$$y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x,$$

## 0.3.2 复合函数

### 一、 复合函数

**定义:** 设函数  $y = f(u)$   $u \in D_1$  与函数  $u = \varphi(x)$   $x \in D_2$  且  $u$  的值域为  $U_\varphi$ ,  $D_1 \cap U_\varphi \neq \Phi$ , 则称函数  $y = f[\varphi(x)]$  为由  $y = f(u)$  与  $u = \varphi(x)$  复合而成的**复合函数**,  $u$  为**中间变量**。

**例:**  $y = \sin u$  与  $u = 3^x$  可以复合成为:  $y = \sin 3^x$

**[例]** 求函数  $y = \sqrt{u}$  与  $u = 3x^2 + 1$  的复合函数。

**解** 将  $u = 3x^2 + 1$  代入  $y = \sqrt{u}$  得复合函数

$$y = \sqrt{3x^2 + 1}。$$

**注意:**

- (1)并非任意两个函数都能构成复合函数, 如  $y = \ln \mu$  和  $\mu = -x^2$ ;
- (2)复合函数的中间变量可以有多个。

## 二、分解复合函数

(1) 由外到内

(2) 分解出来的每一个函数都必须是简单函数

简单函数 { (1)基本初等函数  
(2)由基本初等函数经过四则运算  
所得的函数

求导数时，需把复合函数拆分为若干简单函数的复合。

**[例]** 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合成的。

$$(1) \quad y = \sqrt{x^2 - x + 5}; \quad (2) \quad y = \log_5(2x^2 + 3)$$

解: (1)  $y = \sqrt{x^2 - x + 5}$  由  $y = u^{\frac{1}{2}}, u = x^2 - x + 5$  复合而成。

(2)  $y = \log_5(2x^2 + 3)$  由  $y = \log_5 u; u = 2x^2 + 3$  复合而成。

---

$$(3) \quad y = \sin^2 \frac{x}{3}; \quad (4) \quad y = e^{\arctan \frac{1}{x}}$$

解: (3)  $y = \sin^2 \frac{x}{3} = (\sin \frac{x}{3})^2$  由  $y = u^2, u = \sin v, v = \frac{x}{3}$  复合而成。

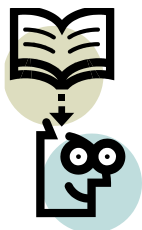
(4)  $y = e^{\arctan \frac{1}{x}}$  是由  $y = e^u, u = \arctan v, v = \frac{1}{x}$  复合而成。

## 二、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的并可用一个解析式表示的函数称为**初等函数**

例如： $y = \frac{\tan x - \sqrt[3]{2x}}{2^{-x} + \sqrt{\sin x}}$ ， $y = \sqrt{\ln 5x + 3^x + \sin^2 x}$  等都是初等函数。

▲特点：等号后面只有一个解析式



$y = |x|$ 是初等函数吗？

## 堂上练习:

指出下列函数的复合过程

$$(1) y = \sin(\ln x)$$

$u$

$$(2) y = \sqrt{\cos x^2}$$

$u$

$$(3) y = \ln \tan \frac{x^2 + 1}{2}$$

$u$

$v$

$$(4) y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$$

$u$

$v$

# 小结

函数是高等数学里面最重要的概念之一，也是高等数学的主要研究对象。本节需要掌握：

(1) 函数的概念

(2) 函数的一些简单性态

奇偶性、单调性、有界性和周期性

(3) 反函数的概念

(4) 初等函数

基本初等函数、简单函数、复合函数

(5) 复合函数的分解