Math

导数的应用（1）

（第三章）

中值定理

（第三章）第一节

主要内容：

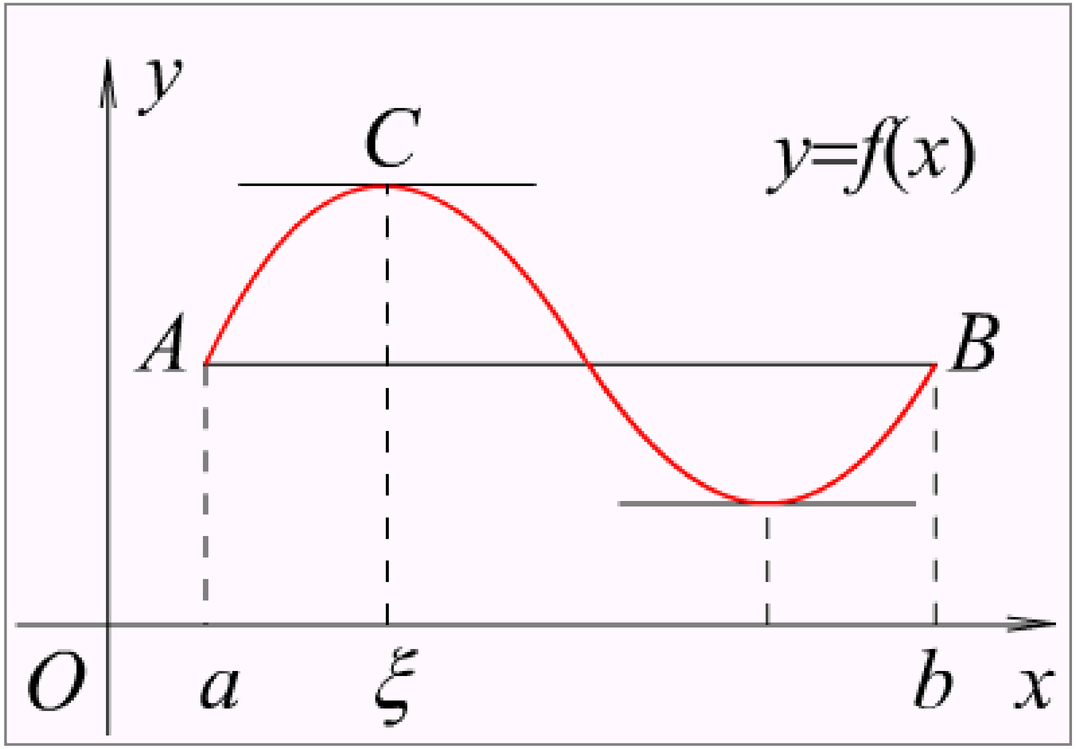
一、费马引理

二、罗尔定理

三、拉格朗日中值定理

一、费马引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值,若 $f'(x_0)$存在, 则 $f'(x_0) = 0$.



一、费马引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值，若 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0) = 0$.

证明： 设 $f(x_0)$为最大值.

当$x \in (a,b)$时，$f(x) - f(x_0) \le 0.$

当$x > x_0$时，$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

当$x < x_0$时，$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

所以，$f'(x_0) = 0.$

$f(x_0)$为最小值时类似可证.

二、罗尔定理

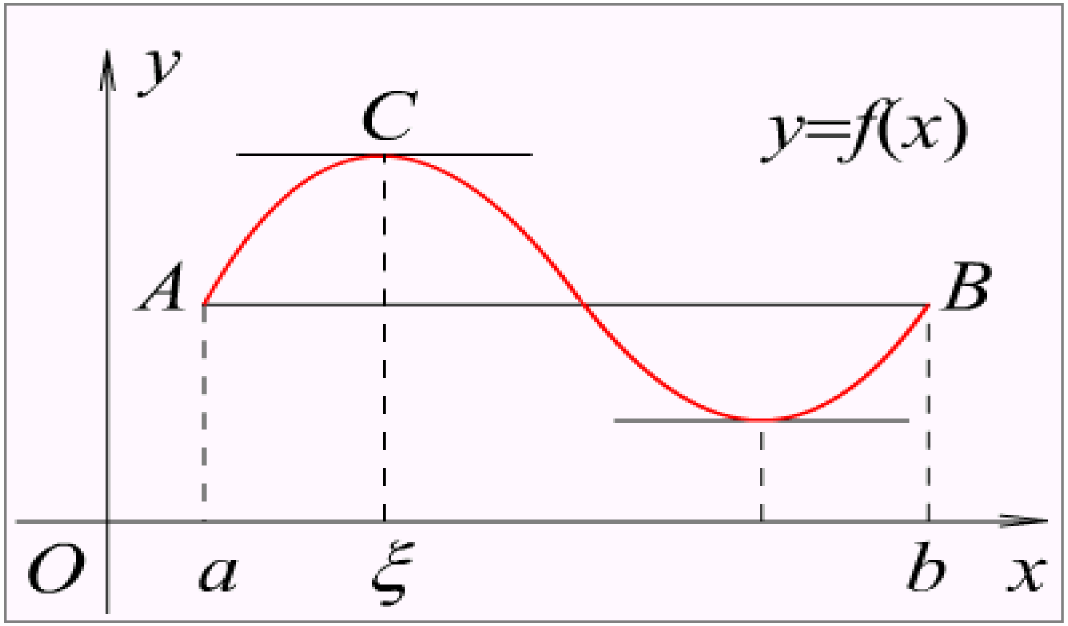
如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.



二、罗尔定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a,b)$.

(2) 若 $M \neq m$. 则 $M \neq f(a)$, 或 $m \neq f(a)$. 设 $M \neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,

使 $f(\xi) = M$. 由费马引理,

$f'(\xi) = 0$.

当 $m \neq f(a)$ 时, 类似可证 .

三、拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得

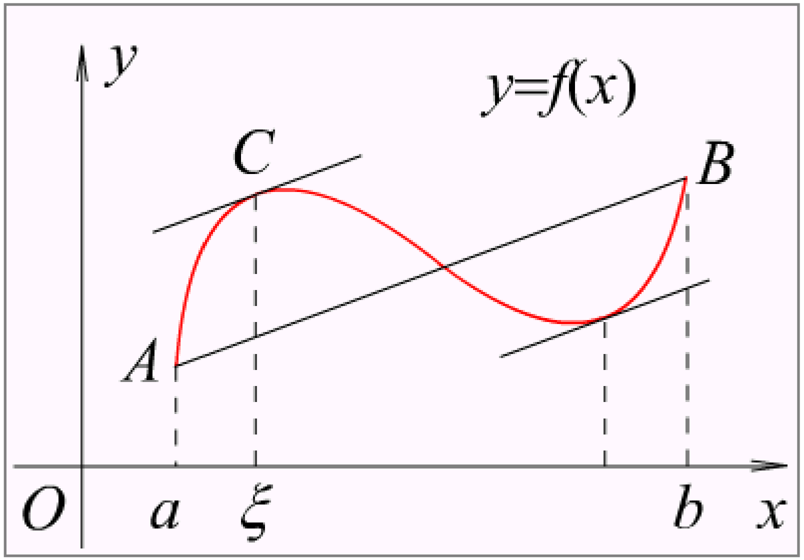
$$f(b)-f(a)= f'(\xi)(b-a).$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 AB.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



三、拉格朗日(Lagrange)中值定理

例1　证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证明　设 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，根据定理，在 $(0,x)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad 0<\xi<x\,.$$

由于 $f(0)=0,\ f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$，因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}\,.$$

又由 $0<\xi<x$，有 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，　即　$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\,.$

洛必达法则

（第三章）第二节

主要内容：

一、洛必达法则

二、例题

未定式的定义

在函数商的极限中，如果分子和分母同是无穷小或同是无穷大，那么极限可能存在，也可能不存在，这种极限称为未定式，记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- 未定式举例

下列极限都是未定式:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \quad (\frac{0}{0}\text{型})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad (\frac{0}{0}\text{型})$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0) \quad (\frac{\infty}{\infty}\text{型})$$

$$\lim_{x\to +0} x^n \ln x\ (n>0) \quad (0\cdot\infty\text{型})$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \quad (1^{\infty}\text{型})$$

$$\lim_{x\to +0} x^x \quad (0^0\text{型})$$

❖定理[洛必达(L’Hospital)法则]

如果函数$f(x)$和$g(x)$满足如下条件:

(1) $f(x)$和$g(x)$都是当$x\to a$时的无穷小(或无穷大);

(2) $f(x)$和$g(x)$在点a的某去心邻域内都可导且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大),

那么 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

说明: 把定理中的“ $x\to a$ ”换成“ $x\to\infty$ ”，结论仍然成立.

$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则： $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=1.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$

$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

例3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ $\quad(\frac{\infty}{\infty}$型)

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}$ $\quad(\frac{\infty}{\infty}$型)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x\ (n>0)$. $\quad(0\cdot\infty)$

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{-x^n}{n}=0.$

3-1、3-2小结

一、了解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理及其应用、柯西中值定理；

二、掌握应用洛必达法则求未定式极限的方法。

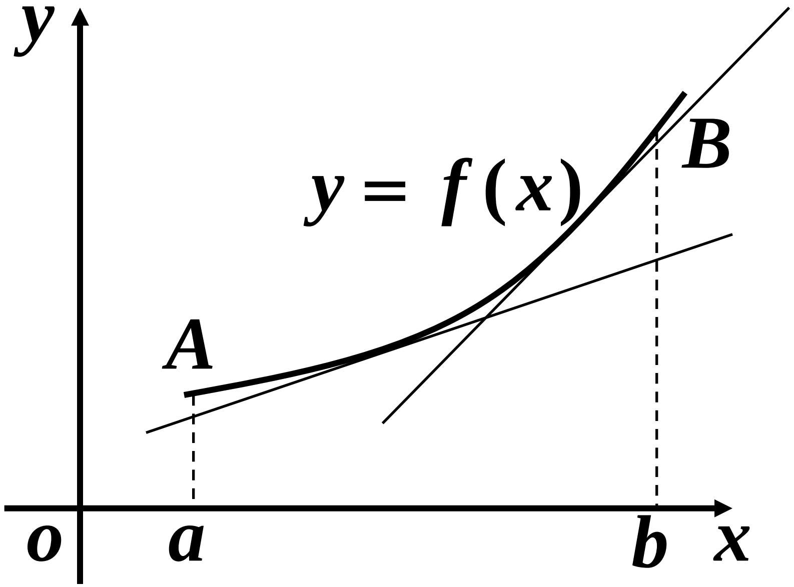
练习

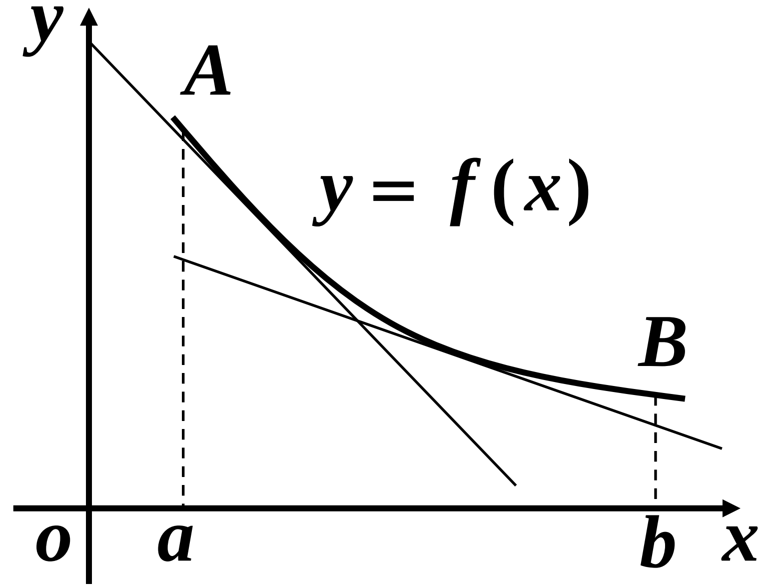
教材P102：1、2、3

教材P107：1、2

函数的单调性

（第三章）第三节





在 (a,b) 内，切线与 x 轴正方向的夹角 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，斜率为正，即 $f'(x)>0$

函数单调递增。

在 (a,b) 内，切线与 x 轴正方向的夹角 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，斜率为负，即 $f'(x)<0$

函数单调递减。

定理　设函数　$f(x)$在区间(a,b)内可导,

(1) 若在 (a,b)内, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调增加；

(2) 若在 (a,b)内, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调下降。

例 1 判断函数 $y=\sin x$在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的单调性。

解　在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内，　　$y'=\cos x>0$

所以由定理可知，函数 $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加。

例2 $f(x)=\frac{1}{x}$,　$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,

在$(-\infty,0)$ 和$(0,+\infty)$函数单调减少。

判断函数单调性的一般步骤：

（1）给出函数定义域；

（2）求一阶导数，用一阶导数的根和一阶导数不存在的点来划分定义区间；

（3）判定一阶导数在每个子区间上的符号。

定义：一阶导数为零的点称为驻点。

例3 $f(x)=x^3-3x$

解：函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=1$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

例4　讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性。

解：　函数的定义域为：$(-\infty,+\infty)$

当 $x\neq 0$ 时，函数的导数为 $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

当 $x=0$ 时，函数的导数不存在。

在 $(-\infty,0)$ 内，$y'<0$　因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少；

在 $(0,+\infty)$ 内，$y'>0$　因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增；

例5　判断函数　$f(x)=x^3$的单调性。

解　在$f(x)=x^3$，

$$f'(x)=3x^2>0,$$

函数$f(x)=x^3$在$(-\infty,0]$及$[0,+\infty)$上都是单调增加的，

从而在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内单调增加

还要指出的是：如果$f'(x)$在某个区间内只有有限个点处导数为0，在其余各点处均为正（或均为负），那么$f(x)$在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）。

例6 证明 $e^x > 1 + x,\ (x > 0)$

证 作辅助函数 $f(x) = e^x - 1 - x$

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0)$$

故 $x > 0$ 时，$f(x)$为增函数，于是有

$$f(0) < f(x) \ (x > 0)$$

即 $e^0 - 1 - 0 < e^x - 1 - x$

所以 $e^x > 1 + x$

例7 证明 $e^x > ex \ (x > 1)$

证　作辅助函数 $f(x) = e^x - ex$

$f'(x) = e^x - e > 0 \qquad (x > 1)$

故 $x > 1$ 时， $f(x)$ 为增函数，

即 $$f(x) > f(1)$$

故 $$e^x - ex > e^1 - e$$

即 $$e^x - ex > 0$$

$$e^x > ex$$