不定积分

（第4章）

《高等数学》

4.1 不定积分的概念与性质

4.1.1 原函数的概念

先考察一个例子。

例1 某函数在区间 (a,b) 内的任一点 x 处的导数等于 $2x$，求出该函数表达式。

解：设所求函数为 $y=F(x)$，由题意知 $F'(x)=2x$

由于 $(x^2+C)'=2x$ （C为任意常量），

所以 $F(x)=x^2+C$

这是一个与微分学中求导数相反的问题。

一般地，我们给出下面的定义：

定义4.1　设$f(x)$是定义在区间D上的已知函数。

若存在一个函数$F(x)$，对任何$x \in D$均有

$$F'(x) = f(x) \text{ ，或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称函数$F(x)$为已知函数$f(x)$ 在区间 D上的一个原函数。

例如，因为 $(\sin x)' = \cos x \quad x \in (-\infty, +\infty)$ ，所以

$\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数。

4.1.2　不定积分的定义

定义4. 2 对于某区间D上的函数$f(x)$，若存在原函数，则称$f(x)$为可积函数，并将$f(x)$的全体原函数记为

$$\int f(x)dx$$

称它是函数$f(x)$的不定积分，其中x是积分变量，$f(x)$是被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，$\int$ 是积分号。

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则由定义有

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad （C \text{ 称为积分常数}）$$

例2　求下列不定积分：

（1）　$\int x^2 dx$　　　（2）　$\int \frac{dx}{1+x^2}$

解：由于 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数。

因此 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

解：由于 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数。

因此 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

例3　求过$(0,1)$点，且在其上任一点处的切线斜率为$3x^2$的曲线方程 $y=f(x)$。

解：曲线的切线斜率为$3x^2$，

即　$k=y'=3x^2$，　　$y=\int 3x^2dx=x^3+C$

得曲线簇 $y=x^3+C$，由于曲线过$(0,1)$点，代入上式，

得 $1=0^3+C$，即 $C=1$，故所求曲线方程为：$y=x^3+1$

当需要从积分曲线簇中求出过点(x_0,y_0)的一条积分曲线时，只要把$x=x_0$，$y=y_0$代入$y=F(x)+C$中解出C即可。

4.1.3不定积分的性质

性质1　求不定积分与求导或微分互为逆运算。

(1)　$[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或 $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$

则有 $$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

于是 $$\left[\int f(x)dx\right]' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

故得式（1）

(2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF'(x) = F(x) + C$

由 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$

则有 $$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

也就是，不定积分的导数（或微分）等于被积函数（或被积表达式）；一个函数的导数（或微分）的不定积分与这个函数相差一个任意常数。

性质2　两个函数的代数和的不定积分，等于它们的不定积分的代数和，即

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

这个性质可以推广到任意有限多个函数的代数和的情况。

性质3　在求不定积分时，非零常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0)$$

4.1.4 基本积分公式与直接积分法

（1） $\int kdx = kx + C$(k为常数)

（2） $\int x^{\mu}dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$

（3） $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

（4） $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}x + C(a > 0, a \neq 1)$

（5） $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

（6） $\int \sin xdx = -\cos x + C$ （7）$\int \cos xdx = \sin x + C$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

例1 求 $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$

解: $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx$

$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C$

注意:检验积分结果是否正确, 只要对结果求导, 看它的导数是否等于被积函数，相等时结果是正确的，否则结果是错误的。

直接积分法

例2　求下列不定积分：(1)　$\int(3e^x - \frac{1}{x^2} + 1)dx$

解：　直接利用不定积分的运算性质和积分基本公式，

得　$$\int(3e^x - \frac{1}{x^2} + 1)dx = 3\int e^x dx - \int x^{-2}dx + \int dx$$

$$= 3e^x - \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + x + C$$

$$= 3e^x + \frac{1}{x} + x + C$$

(2) $$\int \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}dx$$

解：先把被积函数变形为代数和的形式，再求积分。

$$\int \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}dx = \int (x^{-\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \int (x^{-\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(3) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

解：被积函数是分式，且不能直接积分，通常是把被积函数分项，化为几个分式之和，再利用直接积分法求解。

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$= \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

(4) $\int \tan^2 x dx$

解：先利用三角恒等式变形，然后再积分：

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + C$$

注意：在不定积分的计算过程中，去掉积分符号后不要忘记加上积分常数 。

4.2 换元积分法

4.2.1 第一换元积分(凑微分)法

计算 $\int (2x+3)^9 dx \neq \frac{1}{10}(2x+3)^{10} + C$

例如，求 $\int 2xe^{x^2} dx$

对于复合函数 $F[\varphi(x)]$, 令 $u=\varphi(x)$, 若 $F'(u)=f(u)$，有

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]d\varphi(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

那么 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$

$$= \int dF[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$$

此式告诉我们，如果某积分的被积表达式为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 的结构形式，则可先计算$\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$ ，**并令** $u=\varphi(x)$，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du$$

再利用基本积分公式求得积分结果。

此方法称为第一换元积分法，又称凑微分法.

通过中间变量 $u = x^2$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = e^{x^2} + C$$

$$\int (2x+3)^9 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^9 d(2x+3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9+1}(2x+3)^{9+1} + C$$

$$= \frac{1}{20}(2x+3)^{10} + C$$

例1　求 $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx$.

解　把 $2-5x$ 视为中间变量 u . 因为

$$dx = -\frac{1}{5} d(2-5x)$$

所以 $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx = -\frac{1}{5}\int (2-5x)^{-\frac{1}{2}} d(2-5x)$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2-5x)^{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$$

例2　求 $\int x\sqrt{x^2-6}dx.$

解　由 $xdx=\frac{1}{2}d(x^2-6)$ 得：

$$\int x\sqrt{x^2-6}dx=\frac{1}{2}\int (x^2-6)^{\frac{1}{2}}d(x^2-6)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2-6)^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-6)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例3　求 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

解　　由 $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$ 得：

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}d(\sqrt{x})$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + C$$

例4　求 $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx.$

解　由 $e^x dx = d(e^x - 1)$ 得：

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx = \int \frac{1}{e^x - 1}d(e^x - 1) = \ln|e^x - 1| + C.$$

例5　求 $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx.$

解　由 $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$ 得：

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

例6　求 $\int \tan x dx.$

解　$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x)$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

同理可求得　$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

例7　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d(\frac{x}{a})$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

例8　求 $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

解　$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1} dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1} d(\frac{x}{a})$$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

常见几种基本凑微分形式如下

（其中a,b,m是常数，且$a\neq 0$）

(1) $$dx=\frac{1}{a}d(ax)=\frac{1}{a}d(ax\pm b);$$

(2) $$x^m dx=\frac{1}{m+1}dx^{m+1}=\frac{1}{a(m+1)}d(ax^{m+1}\pm b)\quad (m\neq -1),$$

特别是： $\frac{1}{x^2}dx=-d(\frac{1}{x}),\ \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x};$

(3) $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)=\frac{1}{a}d(a\ln x\pm b);$

(4) $e^x dx=de^x=\frac{1}{a}d(ae^x\pm b);$

(5) $\sin x dx=-d(\cos x);$

(6) $\cos x dx=d(\sin x);$

(7) $\frac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x dx=d(\tan x);$

(8) $\frac{1}{\sin^2 x}dx=\csc^2 x dx=-d(\cot x).$

例9　求积分：（1） $\int \frac{x^2}{x-1}dx$;(2) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

分析：本题中两个不定积分均不能直接用凑微分法求解，需先把被积函数适当变形后再求积分。

解　(1) 因为 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$,

所以 $\int \frac{x^2}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{1}{x-1})dx$

$= \int xdx + \int dx + \int \frac{1}{x-1}d(x-1)$

$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

(2) 因为 $$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1},$$

所以 $$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

例10 求 $\int\frac{1}{1+e^x}dx.$

解 由于 $\frac{1}{1+e^x}=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ 得:

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx = \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例11 **求** $\int \sec x dx.$

解 $$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

例12　求 $\int \sin^2 x dx.$

解 $$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

4.2.2 第二换元积分法

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]dg(t) \quad (\text{令 } x = g(t))$$

$$= \int f[g(t)]g'(t)dt \quad (\text{计算微分})$$

$$= F(t) + C \quad (\text{求出积分})$$

$$= F[g^{-1}(t)] + C \quad (\text{代回原自变量})$$

这种方法称为第二换元积分法。

例13　求　$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$

解　令 $u=\sqrt{x-1}$，于是 $x=u^2+1,\ dx=2udu$，从而

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int \frac{u}{u^2+1}\cdot 2udu=2\int \frac{u^2}{u^2+1}du=2\int (1-\frac{1}{1+u^2})du$$

$$=2(u-\arctan u)+C$$

$$=2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C.$$

例14　求 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

解　令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$，于是 $\dfrac{1+x}{x}=t^2, x=\dfrac{1}{t^2-1},$

$$dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2},$$ 从而

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$=-2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=-2[t+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt]$$

$$=-2t-\ln|t-1|+\ln|t+1|+C=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C.$$

例15 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 在被积函数中含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$,它们的根指数分别为2和3，其最小公倍数为6。设 $t=\sqrt[6]{x}$, 则 $x=t^6, dx=6t^5dt$, 从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt$$

$$=6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt \quad =6\left[\int (t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt\right]$$

$$=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

例16 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0).$

解 这个积分的困难在于根式$\sqrt{a^2 - x^2}$, 但是我们可以利用三角公式 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,作变量代换 $x = a\sin t$, 就可以化去根式. 同时取 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 于是 $x = a\sin t$ 有反函数 $t = \arcsin\frac{x}{a}$. 因此

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}d(a\sin t)$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2 t} \cdot a\cos t dt$$

$$= a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

因为 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,所以

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例17 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$.

解 可以利用三角公式 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 来化去根式, 设

$x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int \sec t dt.$$

利用例11的结果, 注意到 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$从而 $\sec t>0$ 并有

$$\sec x=\sqrt{1+\tan^2 t}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2},$$

便可计算如下:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

其中 $C = C_1 - \ln a$，仍是任意常数.

一般地，当被积函数含有：

（1）$\sqrt{a^2-x^2}$, 可作代换 $x=a\sin t$;

（2）$\sqrt{x^2+a^2}$, 可作代换 $x=a\tan t$;

（3）$\sqrt{x^2-a^2}$, 可作代换 $x=a\sec t$.

4.3 分部积分法

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 具有连续导数，

根据乘法微分公式有 $d(uv) = udv + vdu,$

即 $udv = d(uv) - vdu,$

对该式两边同时积分

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad 即 \int uv' dx = uv - \int vdu$$

此公式称为不定积分的分部积分公式。

分部积分的关键是首先明确适应于分部积分的被积函数类型、U 的选择及凑成 $\mathrm{d}v$。常见的分部积分类型共有五种：

(1) $\int x^n \sin ax dx \quad u = x^n \quad dv = \sin ax dx = d(-\frac{1}{a}\cos ax)$,

或 $\int x^n \cos ax dx \quad u = x^n \quad dv = \cos ax dx = d(\frac{1}{a}\sin ax)$;

(2) $\int x^n e^{ax} dx \quad u = x^n \quad dv = e^{ax} dx = d(\frac{1}{a}e^{ax})$;

(3) $\int x^n \ln(ax \pm b) dx \quad u = \ln(ax \pm b)$

$$dv = x^n dx = d(\frac{1}{n+1}x^{n+1});$$

(4) $\int x^n \arcsin ax dx \quad u = \arcsin ax \quad dv = x^n dx = d(\frac{1}{n+1}x^{n+1});$

(5) $\int e^{ax}\sin bx dx \quad u = e^{ax} \quad dv = \sin bx dx = d(-\frac{1}{b}\cos bx),$

也可令 $u = \sin bx \quad dv = e^{ax}dx = d(\frac{1}{a}e^{ax}).$

或 $\int e^{ax}\cos bx dx \quad u = e^{ax} \quad dv = \cos bx dx = d(\frac{1}{b}\sin bx),$

也可令 $u = \cos bx \quad dv = e^{ax}dx = d(\frac{1}{a}e^{ax}).$

例1：求$\int x\sin x dx$

解　被积函数属于第一种类型，应用分部积分法求解.

令幂函数x为u,则将$v' dx = \sin x dx$凑成$dv = d(-\cos x)$

利用分部积分公式，得

$$\int x\sin x dx = \int x d(-\cos x) = x(-\cos x) - \int -\cos x dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

例2：求$\int xe^x dx$

解：被积函数是由幂函数和指数函数构成，

取幂函数x作为u，则将$v' dx = e^x dx$凑成

$dv = d(e^x)$

由分部积分公式，有

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

例3：求$\int x\ln x dx$

解：被积函数是由幂函数和对数函数构成，

取对数函数$\ln x$作为u，则将$v' dx = x dx$凑成

$$dv = d(\frac{x^2}{2})$$

利用不定积分公式，有

$$\int x\ln x dx = \int \ln x d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

例4　求 $\int \arctan x dx.$

解 $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x d(\arctan x)$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

例5　求 $\int e^x \sin x dx.$

解　$\int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

此积分$\int e^x \cos x dx$ 仍属同一类型，再用分部积分法：

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

注意到：结果中又有原积分式出现，此时移项解方程，即可求得原积分:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1,$$

故 $$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C.$$

其中 $C = \dfrac{C_1}{2}$ 为任意常数.

例6　求 $\int x^2 e^{-x} dx.$

解　$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} - \int -e^{-x} d(x^2)$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx,$$

这里，积分 $\int x e^{-x} dx$ 仍需继续利用分部积分法求解，

由上例的结果得：

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + C$$

$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.$$

例7　设 $\sec^2 x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf(x)dx$.

解　因为 $\left(\sec^2 x\right)' = f(x)$, 所以

$$\int xf(x)dx = \int x\left(\sec^2 x\right)' dx$$

$$= \int xd\sec^2 x$$

$$= x\sec^2 x - \int \sec^2 x dx$$

$$= x\sec^2 x - \tan x + C.$$

这个例子说明，在积分过程中往往要兼用换元法和分部积分法。