

第8章 线性代数初步

线性代数 (linear algebra) 的理论和方法广泛应用于科学技术、工程技术和国民经济等众多领域, 它是数学的一个分支, 主要研究对象是向量, 向量空间 (或称线性空间) 线性变换和有限维的线性方程组. 线性代数理论已被泛化为算子理论, 在数学建模中非线性模型通常可以近似为线性模型, 使得线性代数被广泛应用于自然科学及社会科学中. 本章将介绍线性代数理论中的行列式、矩阵、向量组线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值等内容.

8.1 行列式

本节主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法.

一、行列式的定义

将 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 排成 n 个横行及 n 个竖列的方形表格, 两边再用竖线 “|” 围起, 就得到 n 阶行列式的记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中每个数 a_{ij} 称为行列式的元素, 它有两个下标, 第一个下标 i 表示该元素所在的行数, 第二个下标 j 表示所在的列数, a_{ij} 就是 i 行 j 列的元素. 行列式的行数是从上到下依次为第一行, 第二行, \dots , 第 n 行. 列数是从左到右依次为第一列, 第二列, \dots , 第 n 列.

行列式有两条对角线, 由左上到右下那条对角线称为主对角线, 在主对角线上的元素为 a_{11} ,

a_{22}, \dots, a_{nn} . 由右上到左下的对角线有时称为副对角线.

根据行列式的定义, 一二三阶行列式可以计算如下:

一阶行列式: $|a_{11}| = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$

二阶行列式:

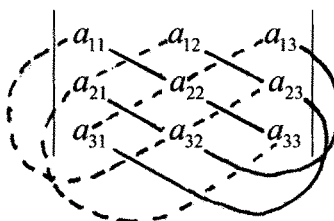
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \\ + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

如果在三阶行列式中, 将冠以“+”号的项的三个数用实线加以连接, 将冠以“-”号的项的三个数用虚线加以连接, 就可以得到如下图形:



利用这个图形, 很容易写出三阶行列式的六项代数和.

例 1 计算以下两个行列式:

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 (1) $D_1 = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2$

$$(2) D_2 = 3 \times 0 \times 5 + 2 \times 4 \times 2 + (-1) \times 1 \times (-3) - (-1) \times 0 \times 2 - 3 \times 4 \times (-3) - 2 \times 1 \times 5 \\ = 0 + 16 + 3 - 0 + 36 - 10 = 45.$$

二、行列式按行(列)展开

定义 1 在 n 阶行列式中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列剩下的 $n-1$ 阶行列式记

作 M_{ij} , 称为元素 a_{ij} 的余子式, 而 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

则 1 行 1 列元素 a_1 的余子式 M_{11} 及代数余子式 A_{11} 为

$$M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2 行 3 列元素 b_3 的余子式 M_{23} 及代数余子式 A_{23} 为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

由定义可知，当元素所在的（行数+列数）为偶数时，代数余子式和余子式相等，为奇数时，代数余子式和余子式相差一个符号。

定理 1 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\text{按第 } i \text{ 行展开式: } D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\text{按第 } j \text{ 列展开式: } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\dots,n).$$

推论 1 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j),$$

$$\text{和 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad (i \neq j)$$

利用行列式的展开式，可以将计算 n 阶行列式化为计算 $n-1$ 阶行列式. 对于数字元素的行列式，经常将某行（列）的元素除一个元素外都化为零，再按该行（列）展开，达到降阶的目的.

例2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 第4列比较简单，并且还有一个0，所以对行作运算，使第4列除一个元素外，其余元素都是0，具体计算如下

$$D \begin{matrix} r_2 + r_3 \\ r_4 - r_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第4列展开}} 1 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第3列展开}} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[0 \times 2 - (-4)(-2)] = 8.$$

例3 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

求 (1) D 中第三行各元素的代数余子式之和 $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34}$;

(2) D 中第四行各元素余子式之和 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

解 (1) 将 $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34}$ 看作 D 中第3行元素改为 1, 1, 1, 1 后，再按第3行展开的展开式，故有

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2) M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第3行展开}} -7 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \times (-4) = -28.$$

习题 8-1

A. 基本题

1. 计算以下行列式

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (3) D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

B. 一般题

2. 计算以下行列式

$$(1) D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \quad (2) D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(3) D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4) D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

C. 提高题

3. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

8.2 矩阵

本节主要介绍矩阵的基本概念与运算和矩阵的秩. 通过伴随矩阵可以求出矩阵的逆矩阵, 利用矩阵的初等变换, 求逆矩阵和计算矩阵的秩.

一、 矩阵概念

矩阵是从许多实际问题中抽象出来的一个数学概念, 它在自然科学的各个领域和经济管理、经济分析中有着广泛的应用. 我们常常用数表表示一些量或关系, 如工厂中的产量统计表, 市场上的价目表等等. 来看这样一个简单的实例:

例 1 某户居民第二季度每个月水(单位: 吨)、电(单位: 千瓦时)、天然气(单位: 立方米)的使用情况, 可以用一个三行三列的数表表示为

	水	电	气
4月	9	165	14
5月	10	190	15
6月	10	210	16

由例 1 可以看到, 对于生活中的问题可以用数表来表示, 我们将这样的数表称为矩阵.

定义 1 将 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) 排成一个矩形的表格, 用方括号(或圆括号)围起来, 称为 $m \times n$ 矩阵, 记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ 简记为 } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

也记为 $A_{m \times n}$, 指明 A 是 $m \times n$ 矩阵, 记为 (a_{ij}) 仅指明 i 行 j 列元素为 a_{ij} . 有关矩阵的元素,

行、列, 对角线等名称, 与行列式的相应名称相同, 不再重述. 但应注意, 矩阵是数的表格, 行列式是数, 两者应严加区别.

当 $m = n$ 时, A 称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 一阶矩阵 $[a_{11}]$ 看作数 a_{11} , 除此之外, 矩阵是表格, 不是数.

零矩阵及单位矩阵 元素都为 0 的 $m \times n$ 矩阵称为零矩阵, 记为 $0_{m \times n}$ 或 0 . (今后遇到 0, 是代表数零还是零矩阵, 根据上下文可以分辨清楚). 主对角线上元素全是 1, 其余元素全是

0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n 或 E .

例如: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是 2×3 的零矩阵, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 3 阶单位矩阵.

行矩阵及列矩阵 只有一行的 $1 \times n$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为行矩阵 (为避免混淆, 用逗号将元素隔开). 只有一列的 $n \times 1$ 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

称为列矩阵.

矩阵相等 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 当所有对应元素都相等时, 称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 即

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$

两个 $m \times n$ 矩阵相等的一个等式, 相当于 $m \times n$ 个数量等式.

二、 矩阵的计算

1. 矩阵的加法

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, k 为数, 则

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} =$$

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

记 $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$, $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$.

应注意, 只有两个同是 $m \times n$ 类型的矩阵才能相加.

例 2 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $A + B$, $A - B$.

解

$$\begin{aligned}A + B &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+(-2) & 0+3 & -4+4 \\ -2+0 & 5+(-3) & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ A - B &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-(-2) & 0-3 & -4-4 \\ -2-0 & 5-(-3) & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -8 \\ -2 & 8 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 矩阵的乘法

定义3 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则

$$AB = (c_{ij})_{m \times n}, \text{ 其中 } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \quad (i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,n)$$

乘积 AB 的定义要注意以下三点:

第一, A 的列数必须等于 B 的行数, 乘积 AB 才有意义;

第二, 乘积 AB 的行数等于 A 的行数, 列数等于 B 的列数;

第三, 乘积 AB 的 i 行 j 列元素 c_{ij} , 是由 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素相乘之和.

例3 (1) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 0 \times (-1) + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 1 + 3 \times 0 \\ 2 \times 4 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad AB \neq BA$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 无意义. (第一因子列数} \neq \text{第二因子的行数)}$$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

即 $E_2 A = A E_3 = A$ ，说明单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1 在数的乘法中的作用。

(2) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $\beta = [4, 5, 6]$ ，则

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4, 5, 6] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha = [4, 5, 6] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [4 + 10 + 18] = [32] = 32.$$

其中 $\alpha\beta$ 是三阶矩阵，而 $\beta\alpha$ 是一阶矩阵，是一个数， $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ 。

矩阵的幂 设 A 为 n 阶方阵，定义 $A^1 = A$ ， $A^2 = AA$ ， \dots ， $A^n = AA \cdots A$ (n 个 A 相乘)。矩阵的幂有以下性质：

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn}. \quad (m, n \text{ 为正整数}).$$

三、 矩阵的转置及对称矩阵

定义 4 将矩阵 A 的各行换作相同序数的列，所得的矩阵记作 A^T ，称为 A 的**转置矩阵**。

(将 A 化为 A^T 称为将矩阵 A 转置。) 例如

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \text{ 的转置矩阵为 } A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 A^T 为 $n \times m$ 矩阵。 A 中 i 行 j 列的元素 a_{ij} ，在 A^T 中位于 j 行 i 列的位置上。

转置矩阵有以下性质（设 A, B 为矩阵， k 为数，运算可行）：

$$(1) (A^T)^T = A;$$

$$(2) (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3) (kA)^T = kA^T;$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

定义 5 对于 n 阶矩阵 A ，若有 $A^T = A$ ，则称 A 为**对称矩阵**。

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则 $A^T = A \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$

即在对称矩阵 A 中，每一对关于主对角线相对称的元素都相等。

例如，下面三个矩阵 A, B, O 都是三阶对称矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对称矩阵有以下性质：

(1) 若 A, B 都是 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$ 及 kA 也是对称矩阵 (k 为数)。但 AB 不一定为对称矩阵，例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 及 } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 都是对称矩阵，但 } AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ 不是对称矩阵。}$$

(2) 若 A, B 都是 n 阶对称矩阵，则 AB 仍为对称矩阵的充分必要条件是 A 与 B 可交换（即 $AB = BA$ ）。

四、 n 阶矩阵的行列式

定义 6 设 A 为 n 阶矩阵，保持 A 的元素位置不动，由 A 的元素所构成的 n 阶行列式称为 A 的**行列式**，记作 $|A|$ 或 $\det A$ 。即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{的行列式为 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

应注意： A 是数的表格， $|A|$ 则是一个数，它们是不同的对象，也有着许多不同的运算性质，应严加区别。

n 阶矩阵的行列式有以下性质（设 A, B 为 n 阶矩阵， k 为数）

$$(1) |A^T| = |A|;$$

$$(2) |kA| = k^n |A|;$$

$$(3) |AB| = |A||B|.$$

五、 n 阶矩阵的伴随矩阵

定义 7 设有 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

将 A 中所有元素 a_{ij} 都改为它的代数余子式 A_{ij} 后，再转置，所得矩阵称为 A 的伴随矩阵，

记作 A^* ，即

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{例如，设 } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 则 } A \text{ 的伴随矩阵为 } A^* = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

即将二阶矩阵 A 的主对角线上的元素相交换，副对角线上的元素变号，就得到二阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 。

伴随矩阵有以下基本性质： $AA^* = A^*A = |A|E$.

六、 n 阶矩阵的逆矩阵

定义 8 设 A 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 B ，使得

$$AB = BA = E, \quad (E \text{ 为 } n \text{ 阶单位阵})$$

则称 A 为**可逆矩阵**， B 称为 A 的逆矩阵，记作 $A^{-1} = B$.

定理 1 n 阶矩阵 A 为可逆矩阵的充分必要条件是 A 的行列式 $|A| \neq 0$. 当 A 可逆时，

$$\text{逆矩阵为 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

推论 1 若 $AB = E$ (或 $BA = E$)，则 A 可逆，且 $A^{-1} = B$.

逆矩阵有以下性质：

(1) 若 A 可逆，则 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ，且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

(2) 若 A 可逆，则 A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) 若 A 可逆，则 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(4) 若 A 可逆，数 $k \neq 0$ ，则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$.

(5) 若 A, B 同阶可逆，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

若 A 可逆，则定义 $A^0 = E$ ， $A^{-m} = (A^{-1})^m$ ，则幂的性质

$$(A^m)^n = A^{mn}, \quad A^m A^n = A^{m+n}$$

对一切整数 m, n 都成立.

可逆矩阵又称为**非奇异矩阵**，不可逆矩阵称为**奇异矩阵**.

例 4 判断下列矩阵可逆，并求其逆矩阵.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解 (1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 故 A 可逆.

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 故 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

故 B 可逆. 计算各元素的代数余子式如下:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

B 的伴随矩阵为

$$B^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

故得
$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^* = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 5 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 求二阶矩阵 X, Y , 使满足 $AX = B, YA = B$,

(也就是解矩阵方程 $AX = B, YA = B$).

解 $|A|=5 \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

在 $AX = B$ 两边左乘以 A^{-1} , 得 $A^{-1}AX = A^{-1}B$, 即 $X = A^{-1}B$. 再代入 $AX = B$ 中, 得

$A(A^{-1}B) = EB = B$, 故 $X = A^{-1}B$ 满足方程 $AX = B$. 计算得

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

在 $YA = B$ 两边右乘以 A^{-1} , 得 $YAA^{-1} = BA^{-1}$, 即 $Y = BA^{-1}$. 再代入 $YA = B$ 中, 可知 $Y = BA^{-1}$ 满足方程 $YA = B$, 计算得

$$Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

由计算结果可见 $X \neq Y$. 这是由于 A 与 B 不可交换的缘故. 因此, 在等式两边乘一个矩阵时, 特别要注意是在左边乘还是在右边乘.

七、初等变换及利用初等变换求逆矩阵

对矩阵作以下三种变换, 称为矩阵的**行初等变换**:

- (1) 交换两行. (交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);
- (2) 以 $k \neq 0$ 乘某行. (k 乘第 i 行记作 kr_i);
- (3) 以 k 乘某行加到另一行. (k 乘第 j 行加到第 i 行记作 $r_i + kr_j$).

将三种变换中的“行”字改为“列”字, 就称为**列初等变换**. (记号依次换作 $c_i \leftrightarrow c_j$,

kc_i , $c_i + kc_j$). 行初等变换与列初等变换统称为**初等变换**.

矩阵经初等变换后会发生改变. 我们用 $A \rightarrow B$ 表示矩阵 A 经初等变换化成矩阵 B , 用

$A \xrightarrow{\text{行}} B$ 表示仅用行初等变换将 A 化成 B , $A \xrightarrow{\text{列}} B$ 表示仅用列初等变换将 A 化成

B.

引理 1 若 $(A, E) \xrightarrow{\text{行}} (E, B)$, (E 为单位阵), 则 $B = A^{-1}$.

由引理得到用初等变换求逆矩阵的方法:

第一步, 在 A 的右边放上同阶的单位矩阵 E , 得到 $n \times 2n$ 矩阵 (A, E)

第二步, 对 (A, E) 作行初等变换, 目标是将 A 化为单位阵 E , 设 (A, E) 化为 (E, B) ,

则 B 就是所求的 A^{-1} .

例 6 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} .

$$\text{解 } (A, E) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 - \frac{5}{2}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

八、矩阵的秩

定义 9 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 A 中的 k 行和 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 在这些行、列交叉

处的元素构成的 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式. $m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定义 10 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 而所有 $r+1$ 阶子式 (若存在的话) 都等于 0, 则称数 r 为 矩阵 A 的秩, 记作 $R(A)$ 或 $r(A)$ 或秩 (A) . 并规定零矩阵的秩等于 0.

若 A 中的所有 $r+1$ 阶子式都等于 0, 由行列式展开式可知, 所有 $r+2$ 阶子式 (若存在的话) 也都等于 0, 依次类推, 可知 A 中所有高于 r 阶子式都为 0. 因此可以说: 矩阵 A 的秩就是 A 中不等于 0 的子式的最高阶数.

例 7 求下列矩阵的秩.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解 取 A 的 1, 2, 3 行和 1, 2, 4 列, 得到一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

而 A 的所有 4 阶子式都等于 0 (因为都含有一个全为 0 的行). 因此, A 的秩 $R(A)=3$.

B 中任意两行成比例, 所以 B 的所有 2 阶子式都等于 0, 但有 1 阶子式 $|1|=1 \neq 0$, 所以 B

的秩 $R(B)=1$. C 中有一个一阶子式 $|2|=2 \neq 0$, 而所有二阶子式都=0, 所以 C 的秩 $R(C)$

=1. (可见秩的大小不在于非零元素的多少, 而在于非零最高阶子式的阶数的大小)

只有像例 7 中这些较简单的矩阵, 可以由定义直接求出它的秩. 对于较大的一般矩阵, 要用定义求它的秩就较困难. 计算矩阵 A 的秩, 主要是先用初等变换将矩阵 A 化为较简单的矩阵 B , 再由定义求出 B 的秩, 从而得到 A 的秩. 这就需要下面的定理:

定理 2 若 A 经过初等变换化成 B , 则 $R(A)=R(B)$. 换句话说, 矩阵经初等变换后秩不变. 或者说, 等价矩阵的秩相等.

有此定理, 我们就可以利用初等变换将矩阵 A 化简成 B , 再由 B 的秩得到 A 的秩.

例8 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩.

解 对 A 作行初等变换如下

$$A \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - \frac{1}{5}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

取 B 中第 1, 2, 3 行和 1, 3, 5 列的交叉处元素, 构成一个不等于 0 的三阶子式

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \neq 0$$

B 中所有 4 阶子式都等于 0, 所以 B 的秩 $R(B) = 3$, 因为初等变换不会改变矩阵的秩, 所以

$$R(A) = R(B) = 3.$$

习题 8-2

A. 基本题

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $2A, AB, BA, AE, EA$.

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, 求 $A^T, |A|$ 及 A^{-1} .

3. 利用矩阵的初等变换求下列矩阵的逆矩阵 A^{-1} .

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

B. 一般题

4. 求下列矩阵的秩.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{求 } 3AB - 2A \text{ 及 } A^T B.$$

6. 解下列矩阵方程

$$(1). \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(2). X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

C. 提高题

7. 用初等变换求下列方阵的逆阵

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.3 向量组的线性相关性

本节主要介绍 n 维向量组的线性相关和线性无关, 向量组的秩及其与矩阵秩的联系.

一、 n 维向量及其运算

定义 1 n 个有次序的数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的数组称为 n 维向量, 记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

其中每一个数称为分量.第*i*个数 a_i 称为第*i*个分量.分量为实数的向量称为实向量,分量为

复数的向量称为复向量.本书主要讨论实向量.全体*n*维实向量记作 R^n .

今后我们用小写的希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 代表向量.

定义2 设有两个向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

如果 α 与 β 的各分量对应相等,则称 α 与 β 相等,记作 $\alpha = \beta$,即

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

定义3 设有两个向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

k 为数,定义加法及数乘运算如下.

$$\text{加法: } \alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

$$\text{数乘: } k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

向量的加法及数乘运算称为向量的线性运算.

记 $-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$,称为 α 的负向量.

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$,称为 α 与 β 的差.

各分量都等于0的向量称为零向量,记作0,即

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

以上我们将向量记成一行,称为行向量,*n*维向量也可以记成一列

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列向量.为节省篇幅,列向量常记作行向量的转置 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$.

二、向量组的线性相关和线性无关

定义4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 都是 n 维向量.如果存在 m 个数 k_1, k_2, \dots, k_m ,使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \quad (3.1)$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 又称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

定义5 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 n 维向量.如果存在 m 个不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m ,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0 \quad (3.2)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 不是线性相关, 即只有当 k_1, k_2, \dots, k_m 都全为0时, (2)式才能成

立, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关. 换句话说, 即

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{若 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0, \text{ 则 } k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0.$$

线性相关与线性表示有以下关系:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 中至少有一个向量可由其余的向量线性表示.}$$

例1 设 $\beta=(2,3)$, $\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(0,1)$, $0=(0,0)$, 则

$$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \text{ 故 } \beta \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性表示.}$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \beta = 0, \text{ 故 } \alpha_1, \alpha_2, \beta \text{ 线性相关.}$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot 0 = 0, \text{ 故 } \alpha_1, \alpha_2, 0 \text{ 也线性相关, 其中 } 0 \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性表示, 即 } 0 =$$

$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2$, 但 α_1 不能由 $\alpha_2, 0$ 线性表示, α_2 也不能由 $\alpha_1, 0$ 线性表示.

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = (k_1, k_2) = 0$, 则必有 $k_1 = 0, k_2 = 0$, 故 α_1, α_2 线性无关.

例 2 含有零向量的向量组: $0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 必线性相关.

因为 $1 \cdot 0 + 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_m = 0$, 且 $1, 0, \dots, 0$ 不全为 0.

三、向量组的秩

定义 6 设有两个 n 维向量组 A, B 如下

$$A: \alpha_1, \dots, \alpha_s \qquad B: \beta_1, \dots, \beta_t$$

若 A 中每一个向量都可以由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示.

若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 且向量组 B 也可以由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与 B **等价**.

不难验证, 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 又向量组 B 可由向量组 C 线性表示, 则向量组 A 可由向量组 C 线性表示.

定义 7 设 A 是 n 维向量组. (A 中所含有的向量个数可以是有限个, 也可以是无限多个.) 如果 (1) A 中有 r 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

(2) A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关.

则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 A 中的一个 **最大线性无关组**, 简称为 **最大无关组**.

因为线性相关向量组再增加向量仍是线性相关组. 所以 A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关, 则任意 $r+2$ 个向量 (若存在的话) 也线性相关, 依次类推, 可知 A 中任意个数大于 r 的向量组 (若存在的话) 都线性相关. 因此, 定义 6 中的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 A 的所有线性无关组中所含向量个数最大的, 因此称之为最大线性无关组.

定义 8 向量组 A 中最大线性无关组所含向量的个数 r , 称为向量组 A 的 **秩**. 只含零向量的向量组没有最大无关组, 规定其秩为 0. 向量组 A 的秩记为 $R(A)$ 或秩(A).

根据最大无关组及秩的定义, 下面的等价式成立.

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ 线性无关} \Leftrightarrow R(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = m.$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ 线性相关} \Leftrightarrow R(\alpha_1, \dots, \alpha_m) < m.$$

$$A = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

对 A 作行初等变换，将 A 化为阶梯形矩阵，过程如下：

$$A \xrightarrow{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-4r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_3-3r_2 \\ r_4-2r_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5]$$

B 为阶梯形矩阵，含有三个非零行，故 $R(B)=3$ 。因而有

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) = R(A) = R(B) = 3$$

B 中任何三个线性无关的列都是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 的最大无关组。考察第 1, 2, 4 列作成的矩阵

$$B_1 = [\beta_1, \beta_2, \beta_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 \text{ 有一个三阶子式 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

因而 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_4) = R(B_1) = 3$ ，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 线性无关，因而 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 的

最大无关组，由引理， $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_4^T$ 为 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T$ 的最大无关组，即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的最大无关组。

不难验证 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 也是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的最大无关组。

$x = k\xi_1$ 也是 $Ax = 0$ 的解.

由定理 2 可知, 若 $x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 是 $Ax = 0$ 的解, 则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 也是

$Ax = 0$ 解. 其中 k_1, k_2, \dots, k_t 是任意常数.

$Ax = 0$ 的所有解组成的集合记作 S , 即 $S = \{x \mid Ax = 0\}$, 称为方程组 $Ax = 0$ 的解集.

定理 2 说明 S 关于向量的加法及数乘运算封闭, 故 S 为向量空间, 称为 $Ax = 0$ 的解空间,

S 的秩 $R(S)$ 就是 S 的维数, S 的最大无关组就是 S 的基.

定义 1 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解组成的解集 S 的最大线性无关组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$

称为方程组 $Ax = 0$ 的**基础解系**. 根据最大无关组的性质, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 为 $Ax = 0$ 的基础解

系的充要条件为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 满足以下两个条件:

(1) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 是 $Ax = 0$ 的线性无关解向量.

(2) $Ax = 0$ 的任何一个解 ξ 都可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 线性表示.

定理 3 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系所含的向量个数为

$n - R(A)$. (n 为未知数的个数).

因为 $Ax = 0$ 的基础解系就是 $Ax = 0$ 的解集 S 的最大无关组, 其个数就是解集 S 的秩.

因此, 定理 3 可改述为 $R(S) = n - r(A)$, 即 $R(A) + R(S) = n$. (n 为未知数个数.)

定理 4 若 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 则 $Ax = 0$ 的所有解 (称为通解) 为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数, $r = R(A)$, n 为未知数个数.

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}r_1 \\ -\frac{2}{7}r_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 - \frac{5}{2}r_2 \\ r_3 - 7r_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

阶梯形矩阵 B 有两个非零行，秩为 2，故 $R(A) = 2$ 。基础解系所含向量个数为 $4 -$

$2 = 2$ 。因此，任意求出两个线性无关解就是基础解系。

以 B 为系数矩阵的齐次方程组就是原方程组的同解方程组，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1, x_4 = 0$ ，则 $x_1 = 2, x_3 = 0$ ，得解 $x = \xi_1 = (2, 1, 0, 0)^T$ 。

取 $x_2 = 0, x_4 = 1$ ，则 $x_1 = \frac{2}{7}, x_3 = -\frac{5}{7}$ ，得解 $x = \xi_2 = (\frac{2}{7}, 0, -\frac{5}{7}, 1)^T$ 。

以 ξ_1, ξ_2 作为列向量的矩阵 $[\xi_1, \xi_2]$ 中，有一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 。没有更高阶子

式，故 $[\xi_1, \xi_2]$ 的秩为 2，即 $R(\xi_1, \xi_2) = 2$ ，故 ξ_1, ξ_2 线性无关。因此， ξ_1, ξ_2 为方程组的基础

解系，方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ ，其中 k_1, k_2 为任意常数。

要基础解系中不带有分数的分量，可换个取法。即

取 $x_2 = 1, x_4 = 0$ ，则 $x_1 = 2, x_3 = 0$ ，得解 $x = \xi_1 = (2, 1, 0, 0)^T$ 。

取 $x_2 = 0, x_4 = 7$ ，则 $x_1 = 2, x_3 = -5$ ，得解 $x = \xi_3 = (2, 0, -5, 7)^T$ 。

同样得到线性无关解 ξ_1, ξ_3 ，它也是基础解系，通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_3$ (k_1, k_2 为任意常数)。

可见方程组的基础解系不唯一。

实际上，对于本例来说，任取 $x_2 = a_2, x_4 = a_4$ ，再取 $x_2 = b_2, x_4 = b_4$ ，只要满足

$\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0$, 则所得的两个解 $x = \alpha_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 及 $x = \alpha_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$

就是方程组的基础解系, 可见有无穷多种选取方法. 同一个方程组的不同基础解系都可以互相线性表示, 即都是等价的.

例2 k 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多组解? 在有解情况下, 求出其全部解.

解 写出增广矩阵 $B = [A, b]$, 作行初等变换, 得

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & \frac{k-2}{2} & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-(k+1)r_2]{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k-2}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{(k+1)(4-k)}{2} & k(k-4) \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

当 $k \neq -1$ 且 $k \neq 4$ 时, $R(B) = R(A) = 3$, 方程组有唯一解.

为了求出唯一解, 可再对增广矩阵 B 作行初等变换如下:

$$B \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k-2}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2k}{k+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{k^2+2k}{k+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2+2k+4}{k+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2k}{k+1} \end{bmatrix}$$

写出最后矩阵对应的同解方程组, 就得唯一解为

$$x_1 = \frac{k^2 + 2k}{k+1}, \quad x_2 = \frac{k^2 + 2k + 4}{k+1}, \quad x_3 = \frac{-2k}{k+1}$$

当 $k = -1$ 时, 增广矩阵化为

$$B \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

可见 $R(A) = 2$, $R(B) = 3$, $R(A) \neq R(B)$, 方程组无解.

当 $k = 4$ 时, 增广矩阵化为

$$B \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R(B) = R(A) = 2 < 3$, 方程组有无穷多组解.

写出同解方程组, 得

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = k$, 得通解为 $x_1 = -3k$, $x_2 = 4 - k$, $x_3 = k$. (k 为任意常数), 写成列向量形式

为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3k \\ 4 - k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

习题 8-4

A. 基本题

1. 求下列齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y - z = 0 \\ 3x - 7y - 8z = 0 \end{cases}$$

2. 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}$$

求方程组的基础解系及通解.

B. 一般题

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 15x_4 = -1 \end{cases}$$

求所有的解.

C. 提高题

写出一个以 $x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组.

8.5 矩阵的特征值与特征向量

定义 1 设 A 是 n 阶方阵, 如果数 λ 和 n 维非零向量 x 使 $Ax = \lambda x$ 成立, 则称数 λ 为方阵 A 的特征值, 非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

称关于 λ 的一元 n 次方程 $|\lambda E - A| = 0$ 为矩阵 A 的特征方程, 称 λ 的一元 n 次多项式

$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 为矩阵 A 的特征多项式.

注: n 阶方阵 A 的特征值 λ , 就是使齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 有非零的值, 即

满足方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的 λ 都是矩阵 A 的特征值.

特征值与特征向量的求法:

- (1) 计算 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$;
- (2) 求出特征方程 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 即为 A 的全部特征值;
- (3) 对每个 λ_i , 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$, 其中

r 为矩阵 $\lambda_i E - A$ 的秩, 则矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为:

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r}$, 其中 k_1, \dots, k_{n-r} 为不全为零的常数.

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值及对应的特征向量.

$$\begin{aligned} \text{解 } |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

令 $|\lambda E - A| = 0$ 得: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(E - A)X = 0$.

$$\text{即: } E - A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \text{第} \\ \text{二} \\ \text{行} \\ \text{减} \\ \text{第} \\ \text{一} \\ \text{行} \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \text{第} \\ \text{二} \\ \text{列} \\ \text{减} \\ \text{第} \\ \text{一} \\ \text{列} \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array} \end{array} \end{array}.$$

可知 $r(E - A) = 1$, 取 x_2, x_3 为自由未知量, 对应的方程为 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

求得一个基础解系为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 所以 A 的属于特征值 1 的全部特征

向量为 $K_1 \alpha_1 + K_2 \alpha_2$, 其中 K_1, K_2 为不全为零的常数.

5. 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量, 试确定参数 a, b 及特征向

量 α 所对应的特征值.

复习题 8

1. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 10 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 0 & -1 & 0 & 2003 \\ 0 & 0 & -1 & 2004 \\ 0 & 0 & 0 & 2005 \end{vmatrix}$$

2. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

求 (1) D 中第二行各元素的代数余子式之和 $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$;

(2) D 中第三行各元素余子式之和 $M_{31} + M_{32} + M_{33} + M_{34}$.

$$3. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

求: (1) $3A - B$;

(2) $2A + 3B$;

(3) 若 X 满足 $A + X = B$, 求 X .

$$4. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{求 } 3AB - 2A \text{ 及 } A^T B.$$

5. 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [1,2]; \quad (4) [1,2,3] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. 设 A 为 n 阶方阵, n 为奇数, 且 $AA^T = E$, $|A|=1$, 求 $|A-E|$.

7. 判断下列矩阵可逆并求其逆矩阵

$$(1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, (ad-bc=1); \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$8. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 且 } AB + E = A^2 + B, \text{ 求 } B.$$

9. 解下列矩阵方程

$$(1). \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(2). X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

10. 用初等变换求下列方阵的逆阵

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}; \quad (2). \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. 设 $\alpha = (2, 0, -1, 3)^T, \beta = (1, 7, 4, -2)^T, \gamma = (0, 1, 0, 1)^T$

(1) 求 $2\alpha + \beta - 3\gamma$;

(2) 若有 x , 满足 $3\alpha - \beta + 5\gamma + 2x = 0$, 求 x .

13. 已知矩阵 $A = \begin{matrix} \text{轻} & 2 & -1 \\ \text{病} & 3 & 4 \\ \text{偏} & & \\ \text{瓣} & 5 & 3 \end{matrix}$ 与向量 $\beta = (2, 9, 11)^T$

(1) 写出矩阵 A 的列向量组与行向量组;

(2) β 能否用 A 的列向量组线性表示? β^T 能否用 A 的行向量组线性表示?若能线性表示, 则写出表达式.

14. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关?

(1) $\alpha_1 = (-1, 3, 1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 4, 1)^T$;

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 3)^T, \alpha_3 = (1, 3, 6)^T$;

15. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, a)^T, \alpha_3 = (0, a, 5)^T$ 线性无关, 求 a 的值.

16. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 3, 1)^T, \alpha_2 = (2, b, 3)^T, \alpha_3 = (1, 2, 1)^T, \alpha_4 = (2, 3, 1)^T$ 的秩为 2, 求 a, b .

17. 求下列向量组的秩和一个极大无关组, 并将其余向量表示成极大无关组的线性组合.

(1) $\alpha_1 = (1, -2, 3, -1)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -5, 8, -3)^T$;

(2) $\alpha_1 = (3, 0, 1, 2)^T, \alpha_2 = (1, 4, 7, 2)^T$,

$\alpha_3 = (1, 10, 17, 4)^T, \alpha_4 = (4, 1, 3, 3)^T$;

18. 求下列矩阵的特征值与特征向量.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$