第 4 章　不 定 积 分

前面章节已经研究了一元函数的微分学,其基本内容是对于给定的函数 $F(x)$,求其导数 $F'(x)$或微分 $\mathrm{d}F(x)$. 而在实际问题中,往往要研究与此相反的问题,对于给定的函数 $f(x)$,要找出 $F(x)$,使得 $F'(x)=f(x)$或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$,这就是不定积分要完成的任务.

4.1　不定积分的概念与性质

4.1.1　不定积分的概念

先看一个实例.

【例 4-1-1】(列车何时制动)　列车快进站时,需要减速. 若列车减速后的速度为 $v(t)=1-\frac{1}{3}t$(km/min),那么,列车应该在离站台多远的地方开始减速呢?

解　列车进站时开始减速,当速度为 $v(t)=1-\frac{1}{3}t=0$ 时列车停下,解出 $t=3$(min),即列车从开始减速到列车完全停下来共需要 3 min 的时间.

设列车从减速开始到 t 时刻所走过的路程为 $s(t)$,列车从减速到停下来这一段时间所走的路程为 $s(3)$,由速度与位移的关系知 $v(t)=s'(t)$,路程 $s(t)$满足

$$s'(t)=1-\frac{1}{3}t,\text{且 } s(0)=0$$

问题转化为求 $s(t)$,即什么函数的导数为 $1-\frac{1}{3}t$. 不难验证,可取

$$s(t)=t-\frac{1}{6}t^2+C$$

因为 $s(0)=0$,于是 $C=0$,得

$$s(t)=t-\frac{1}{6}t^2$$

列车从减速开始到停下来的 3 min 内所走的路程为

$$s(3)=3-\frac{1}{6}\cdot 3^2=1.5(\mathrm{km})$$

即列车在距站台 1.5 km 处开始减速.

这个问题的核心是已知一个函数的导函数 $F'(x)=f(x)$,反过来求函数 $F(x)$. 这就引出了原函数与不定积分的概念.

1. 原函数

定义 4-1-1 如果在区间 I 内,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即

$$F'(x)=f(x)(x\in I)\ \text{或}\ \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 内的一个**原函数**.

例如,在 $(-\infty,+\infty)$ 内,$(\sin x)'=\cos x$,故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数;在 $t\in[0,T]$ 内,$s'(t)=v(t)$,故路程函数 $s(t)$ 是与它对应的速度函数 $v(t)$ 的一个原函数.

现在进一步要问:如果一个已知函数 $f(x)$ 的原函数存在,那么 $f(x)$ 的原函数是否唯一?

因为 $(\sin x)'=\cos x$,而常数的导数等于零,所以有 $(\sin x+1)'=\cos x$.

$(\sin x+2)'=\cos x,\cdots,(\sin x+C)'=\cos x$(这里 C 是任意常数). 由此可见,如果已知函数 $f(x)$ 有原函数,那么 $f(x)$ 的原函数就不止一个,而是有无穷多个. 那么 $f(x)$ 的全体原函数之间的内在联系是什么呢?

定理 4-1-1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数,则其任意两个原函数之间只差一个常数.

证明 设 $F(x)$,$G(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数,则

$$F'(x)=G'(x)=f(x)$$

于是

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

由于导数为零的函数必为常数,所以有

$$F(x)-G(x)=C_0$$

即

$$F(x)=G(x)+C_0\ (C_0\ \text{为某常数})$$

这个定理表明:若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的全体原函数为 $F(x)+C$(其中 C 是任意常数).

一个函数具备怎样的条件,就能保证它的原函数存在呢? 这里给出一个简明的结论:**连续的函数都有原函数**. 由于初等函数在其定义区间上都是连续函数,所以初等函数在其定义区间上都有原函数. 下面引入不定积分的概念.

2. 不定积分

定义 4-1-2 如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,那么 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$(C 为任意常数),称为函数 $f(x)$ 的**不定积分**,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

其中,把符号 $\int$ 称为**积分号**,$f(x)$ 称为**被积分函数**,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被**积分表达式**,x 称为**积分变量**,C 称为**积分常数**.

由此可见,求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$,就是求 $f(x)$ 的全体原函数,为此,只需求得 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$,然后再加任意常数 C 即可.

【例 4-1-2】 求下列函数的不定积分.

(1) $\int x^2\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$，所以$\frac{x^3}{3}$是 x^2 的一个原函数，因此，

$$\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$$

(2) 因为$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，所以 $\arctan x$ 是$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数，因此

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$$

【例 4-1-3】　求$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　因$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(-1<x<1)$，所以在$(-1,1)$上

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$$

【例 4-1-4】　求$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　当 $x>0$ 时，有$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，

当 $x<0$ 时，有$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$，而

$$\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

综上所述$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

【例 4-1-5】　验证下式成立：$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$.

解　因为$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=\frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)x^{\alpha}=x^{\alpha}$，所以

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$$

【例 4-1-5】所验证的正是幂函数的积分公式，其中指数 α 是不等于-1 的任意实数.

3. 基本积分公式

由前面的例子可知，微分运算与积分运算互为逆运算. 因此，由基本导数或基本微分公式，可以得到相应的基本积分公式：

(1) $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C$ (k 为常数)；

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C(\mu\neq-1)$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

(4) $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$；

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

(6) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$；

(8) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$；

(9) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(10) $\int \sec x \cdot \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

(11) $\int \csc x \cdot \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C$；

(13) $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$.

以上 13 个基本积分公式组成基本积分表，基本积分公式是计算不定积分的基础，必须熟悉牢记.

【例 4-1-6】 计算下列不定积分.

(1) $\int \sqrt[3]{x^2} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$；　　(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \sqrt[3]{x^2} \mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

(2) $\int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int x^{-2} \mathrm{d}x = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -1x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$.

练一练：

1. 求下列函数的不定积分.

(1) $\int \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \mathrm{d}x$；　　(3) $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3} \mathrm{d}x$.

2. 求 $\left(\int x^3 \mathrm{d}x\right)'$ 及 $\int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \mathrm{d}x$.

4.1.2 不定积分的性质

不定积分有以下性质(假定以下所涉及的函数，其原函数都存在).

性质 1 (1) $\left[\int f(x) \mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x) \mathrm{d}x\right] = f(x) \mathrm{d}x$；

(2) $\int F'(x) \mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

即若先积分后求导，则两者的作用互相抵消；反之，若先求导后积分，则抵消后要多一个任

意常数项.

性质 2　$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

即两个函数和(差)的不定积分等于这两个函数的不定积分的和(差).

性质 3　$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x(k\neq 0,k$ 是常数).

即被积函数中的不为 0 的常数因子可以提到积分号外.

用不定积分的定义可直接验证以上性质.利用基本积分公式以及不定积分的性质,可以直接计算一些简单函数的不定积分.

【例 4-1-7】　求 $\int(3x^3-4x^2+2x-5)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}&\int(3x^3-4x^2+2x-5)\mathrm{d}x\\=&\int 3x^3\mathrm{d}x-\int 4x^2\mathrm{d}x+\int 2x\mathrm{d}x-\int 5\mathrm{d}x\\=&\ 3\int x^3\mathrm{d}x-4\int x^2\mathrm{d}x+2\int x\mathrm{d}x-5\int\mathrm{d}x\\=&\ \frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2-5x+C\end{aligned}$$

注意:此题中被积函数是积分变量 x 的多项式函数,在利用不定积分性质 2 之后,拆成了四项分别求不定积分,从而可得到四个积分常数,因为任意常数与任意常数的和仍为任意常数.因此,无论“有限项不定积分的代数和”中的有限项为多少项,在求出原函数后只加一个积分常数 C.

【例 4-1-8】　求 $\int(2^x-3\sin x)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}&\int(2^x-3\sin x)\mathrm{d}x\\=&\int 2^x\mathrm{d}x-\int 3\sin x\mathrm{d}x\\=&\int 2^x\mathrm{d}x-3\int\sin x\mathrm{d}x\\=&\frac{2^x}{\ln 2}+3\cos x+C\end{aligned}$$

注意:计算不定积分所得结果是否正确,可以进行检验.检验的方法很简单,只需验证所得结果的导数是否等于被积函数即可.如【例 4-1-8】中,因为有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2^x}{\ln 2}+3\cos x+C\right)'=\left(\frac{2}{\ln 2}\right)'+(3\cos x)'+C'\\=&\ 2^x-3\sin x\end{aligned}$$

所以所求结果是正确的.

有些不定积分虽然不能直接使用基本公式,但当被积函数经过适当的代数或三角恒等变形,便可以利用基本积分公式及不定积分的性质计算不定积分.

【例 4-1-9】　求 $\int\sqrt{x}(x+1)(x-1)\mathrm{d}x$.

解　因为被积函数

$$\sqrt{x}(x+1)(x-1)=\sqrt{x}(x^2-1)=x^2\sqrt{x}-\sqrt{x}=x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\int\sqrt{x}(x+1)(x-1)\mathrm{d}x\\=&\int(x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\\=&\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

【例 4-1-10】 求$\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解 因为被积函数

$$\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{-\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{2}{3}})\mathrm{d}x\\=&\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x+\int 2x^{\frac{1}{6}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\\=&\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C\end{aligned}$$

【例 4-1-11】 求$\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 将被积函数化为下面的形式,

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$$

即有

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\=&\int\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\=&x-2\arctan x+C\end{aligned}$$

【例 4-1-12】 求$\int\tan^2x\mathrm{d}x$.

解 本题不能直接利用基本积分公式,但被积函数可以经过三角恒等变形化为

$$\tan^2x=\sec^2x-1$$

所以有

$$\begin{aligned}&\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x\\=&\int\sec^2x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x\\=&\tan x-x+C\end{aligned}$$

【例 4-1-13】 求$\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解　本题也不能直接利用基本积分公式，可以用二倍角的余弦公式将被积函数作恒等变形，然后再逐项积分，即

$$\begin{aligned}\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x &= \int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C\end{aligned}$$

【例 4-1-14】　$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解　由于 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$，因此

$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\cot x-\tan x+C$$

练一练：

求下列函数的不定积分.

(1) $\int(x^6+x^5+x^2+1)\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4.1.3　不定积分的几何意义

先看一个例子.

【例 4-1-15】　求过已知点(2,5)，且其切线的斜率始终为 $2x$ 的曲线方程.

解　设已知曲线为 $y=y(x)$，由题意可知，该曲线上点(x,y)处的切线斜率为 $2x$，即

$$y'=2x$$

所以

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$$

$y=x^2$ 是一条抛物线，而 $y=x^2+C$ 是一族抛物线. 我们要求的曲线是这一族抛物线中经过点(2,5)的那一条，将 $x=2$，$y=5$ 代入 $y=x^2+C$ 中可确定积分常数 C：$5=2^2+C$，即 $C=1$.

由此所求曲线方程是 $y=x^2+1$，如图 4-1 所示.

从几何上看，抛物线族 $y=x^2+C$，可由其中一条抛物线 $y=x^2$ 沿着 y 轴上下平移得到，而且在横坐标相同的点 x 处，它们的切线相互平行.

通常称 $y=x^2$ 的图像是函数 $y=2x$ 的一条积分曲线，函数族 $y=x^2+C$ 的图像是函数 $y=2x$ 的积分曲线族.

一般言之，函数 $f(x)$在某区间上的一个原函数 $F(x)$，在几何上表示一条曲线 $y=F(x)$，称为 $f(x)$的一条**积分曲线**. $f(x)$的全部原函数 $y=F(x)+C$(即 $f(x)$的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$)是一族积分曲线，或称为 $f(x)$的**积分曲线族**，这一族积分曲线可由其中任一条沿着 y 轴上下平移得到，在每一条积分曲线横坐标相同的点 x 处作切线，它们相互平行，其斜率都等于 $f(x)$，如图 4-2 所示.

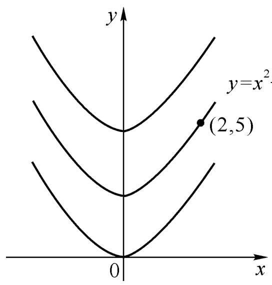

图 4-1

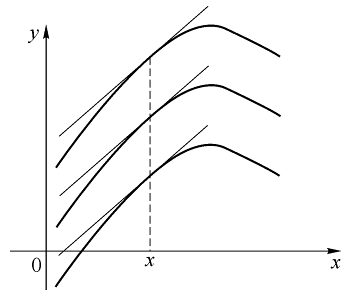

图 4-2

【研讨题】 近年来，世界范围内每年的石油消耗率呈指数增长，增长指数大约为 0.07. 从 1970 年初，石油消耗率大约为 161 亿桶，设 $R(t)$ 表示从第 1970 年起第 t 年的消耗率，则 $R(t)=161e^{0.07t}$，试用此式估算从 1970 年到 2016 年石油消耗的总量.

习题 4-1

A. 基本题

1. 求下列不定积分.

(1) $\int(x^2-3x+2)\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{12}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}\mathrm{d}x$.

2. 求过已知点(0,1)，且其切线的斜率始终为 x^2 的曲线方程.

B. 一般题

3. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$； (2) $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{3}\right)^2\mathrm{d}x$； (3) $\int e^{x+1}\mathrm{d}x$；

(4) $\int(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$； (5) $\int\cot^2x\mathrm{d}x$； (6) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int(x^3+3^x)\mathrm{d}x$； (8) $\int\frac{x^2-x+\sqrt{x}-1}{x}\mathrm{d}x$； (9) $\int\frac{1-e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$；

(10) $\int\frac{1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$； (11) $\int\frac{\cos2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$； (12) $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

C. 提高题

4. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$； (2) $\int\sec x(\sec x+\tan x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos2x}$.

5. 已知 $f(x)$ 的导数是 x 的二次函数，$f(x)$ 在 $x=-1$，$x=5$ 处有极值，且 $f(0)=2$，

$f(-2)=0$. 求 $f(x)$.

4.2　换元积分法

用直接积分法能计算的不定积分是很有限的，即使像 $\tan x$ 与 $\ln x$ 这样的一些基本初等函数的积分也不能直接求得. 因此，有必要寻求更有效地积分方法. 本节将介绍一种重要的积分方法——换元积分法.

4.2.1　第一类换元法

第一类换元积分法是与复合函数的求导法则相联系的一种求不定积分的方法.

先分析一个例子：求 $\int e^{2x}dx$.

解　被积函数 e^{2x} 是复合函数，不能直接套用公式 $\int e^x dx=e^x+C$，为了套用这个公式，先把原积分作下列变形，再作计算

$$\int e^{2x}dx=\int e^{2x}\frac{1}{2}d(2x)\overset{\text{令}u=2x}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C\overset{\text{回代}u=2x}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

验证：因为 $\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)'=e^{2x}$，所以 $\frac{1}{2}e^{2x}+C$ 确实是 e^{2x} 的原函数，这说明上面的方法是正确的.

此解法的特点是引入新变量 $u=2x$，从而把原积分化为积分变量为 u 的积分，再用基本积分公式求解. 它就是利用 $\int e^x dx=e^x+C$，得 $\int e^u du=e^u+C$，再回代 $u=2x$ 而得其积分结果的.

现在进一步问，如果更一般地，设有积分恒等式 $\int f(x)dx=F(x)+C$，那么当 u 是 x 的任何一个可导函数 $u=\varphi(x)$ 时，积分等式

$$\int f(u)du=F(u)+C$$

是否也成立？回答是肯定的. 事实上，由

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

得

$$dF(x)=f(x)dx$$

根据前一章证得的微分形式不变性可以知道，当 u 是 x 的一个可导函数 $u=\varphi(x)$ 时，有

$$dF(u)=f(u)du$$

从而根据不定积分定义，有 $\int f(u)du=F(u)+C$.

这个结论表明：在基本积分公式中，自变量 x 换成任一可导函数 $u=\varphi(x)$ 时，公式仍成立，这就大大扩大了基本积分公式的使用范围. 这个结论又称为**不定积分的形式不变性**.

一般地，如果所求不定积分可以写成

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

的形式,则令 $\varphi(x)=u$,当积分 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$ 容易求得时,可按下述方法计算不定积分

$$\int g(x)\mathrm{d}x \underline{\underline{\text{恒等变形}}}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \underline{\underline{\text{凑微分}}}\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$\frac{\text{换元}}{\text{令 }\varphi(x)=u}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C\,\frac{\text{回代}}{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C$$

这种先"凑"微分式,再作变量置换的方法,称为**第一类换元积分法**.

写成定理即为

定理 4-2-1(第一类换元法) 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$,$u=\varphi(x)$ 可导,则有

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C\overset{\text{回代}}{=\!=\!=\!=}F[\varphi(x)]+C$$

第一类换元法又称**凑微分法**,凑微分法的基本步骤为:凑微分、换元求出积分、回代原变量.其中最关键的步骤是凑微分,现举例说明几种常见的凑微分形式,要求把它们作为公式记住.

1. 凑微分式 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)\quad(a\neq0)$

【例 4-2-1】 求 $\int(3+2x)^6\mathrm{d}x$.

解 被积函数是复合函数,中间变量为 $u=3+2x$,故将 $\mathrm{d}x$ 凑微分为 $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(3+2x)$.

因此
$$\begin{aligned}\int(3+2x)^6\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(3+2x)^6\mathrm{d}(3+2x)\\&=\frac{1}{2}\int u^6\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}u^7+C\\&=\frac{1}{14}(3+2x)^7+C\end{aligned}$$

【例 4-2-2】 求 $\int\sin(3x+1)\mathrm{d}x$.

解 被积函数是复合函数,中间变量为 $u=3x+1$,故将 $\mathrm{d}x$ 凑微分为 $\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1)$.

因此
$$\begin{aligned}\int\sin(3x+1)\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\sin(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)\\&=\frac{1}{3}\int\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}\cos u+C\\&=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C\end{aligned}$$

当运算比较熟练后,设定中间变量 $\varphi(x)=u$ 和回代过程 $u=\varphi(x)$ 可以省略,将 $\varphi(x)$ 当作 u 积分就行了.

【例 4-2-3】 求 $\int\mathrm{e}^{-2x+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int\mathrm{e}^{-2x+1}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x+1}\mathrm{d}(-2x+1)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+1}+C$

【例 4-2-4】 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-2x}}$.

解 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-2x}}=-\dfrac{1}{2}\int(1-2x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-2x)$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-2x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-2x)^2}+C$$

【例 4-2-5】 求 $\int\frac{1}{1+7x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{1+7x}\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\frac{1}{1+7x}\mathrm{d}(1+7x)=\frac{1}{7}\ln|1+7x|+C$

2．凑微公式 $x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}\mathrm{d}x^{\mu+1}\quad(\mu\neq-1)$

【例 4-2-6】 求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$

【例 4-2-7】 求 $\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 4-2-8】 求 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-2}\mathrm{d}(1+x^2)=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$

3．凑微公式 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x\,(x>0)$

【例 4-2-9】 求 $\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^2 x\,\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$

【例 4-2-10】 求 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}\ln x$

$$=\int\frac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}(1+\ln x)=\ln|1+\ln x|+C$$

4．凑微公式 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

【例 4-2-11】 求 $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+2)=\ln(\mathrm{e}^x+2)+C$

5．凑微公式 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x,\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$

【例 4-2-12】 求 $\int\tan x\mathrm{d}x$.

解 $\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x=-\ln|\cos x|+C$

用同样的方法可以求得：$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

【例 4-2-13】 求$\int \sin^5 x\cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^5 x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin^5 x\mathrm{d}\sin x = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

6．凑微公式 $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arctan x$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arcsin x$

【例 4-2-14】 求$\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int (\arctan x)^4\mathrm{d}\arctan x = \frac{(\arctan x)^5}{5} + C$

【例 4-2-15】 求$\int \frac{\mathrm{e}^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\mathrm{e}^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\arcsin x}\mathrm{d}\arcsin x = \mathrm{e}^{\arcsin x} + C$

7．凑微公式 $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$

【例 4-2-16】 求$\int \tan^2 x\sec^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan^2 x\sec^2 x\mathrm{d}x = \int \tan^2 x\mathrm{d}\tan x = \frac{\tan^3 x}{3} + C$

前面仅列举了常见的几种凑微形式，凑微的形式还有很多，需要多做练习，不断归纳，积累经验，才能灵活运用.

8．杂例

【例 4-2-17】 求$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a \neq x)$.

解 由于$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{\mathrm{d}(a+x)}{a+x} - \int \frac{\mathrm{d}(a-x)}{a-x}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

【例 4-2-18】 求$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x (a \neq 0)$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

【例 4-2-19】 求$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x (a > 0)$.

解 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

练一练：

1．在下列各等式右端的括号内填入适当的常数，使等式成立．

(1) $\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(7x-3)$；　　(2) $x\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(x^2)$；

(3) $x\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(4x^2)$；　　(4) $x\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(1+4x^2)$；

(5) $x^2\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(2x^3+4)$；　　(6) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$．

2．求下列不定积分．

(1) $\int(5-3x)^8\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\cos(4x+3)\mathrm{d}x$；　　(3) $\int\mathrm{e}^{6x+1}\mathrm{d}x$；

(4) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x$；　　(5) $\int\dfrac{1}{1-6x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int x^4\mathrm{e}^{x^5}\mathrm{d}x$；

(7) $\int x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$；　　(8) $\int\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^3)^5}$；　　(9) $\int\dfrac{\ln^3x}{x}\mathrm{d}x$；

(10) $\int\dfrac{1}{x(8+\ln x)^2}\mathrm{d}x$；　　(11) $\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^3}\mathrm{d}x$；　　(12) $\int\dfrac{\sin x}{\cos^3x}\mathrm{d}x$；

(13) $\int\sin^2x\cos x\mathrm{d}x$；　　(14) $\int\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$；　　(15) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^5\mathrm{d}x$；

(16) $\int\tan^5x\sec^2x\mathrm{d}x$　　(17) $\int\dfrac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$．

4.2.2　第二类换元法

第一类换元法是通过选择新积分变量 $\boldsymbol{u}$，用 $\boldsymbol{\varphi(x)=u}$ 进行换元，从而使原积分便于求出，但对有些积分，如 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$，$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 等，需要作相反方向的换元，才能比较顺利地求出结果．

定理 4-2-2（第二换元法）

设(1) $x=\psi(t)$ 是单调可导函数，且 $\psi'(t)\neq0$；

(2) $\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$，

则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x\overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=}\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C\overset{t=\psi^{-1}(x)}{=\!=\!=}F[\psi^{-1}(x)]+C$$

其中，$t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数．

第二换元法常用于求解含有根式的被积函数的不定积分，下面介绍几种常用的第二换元技巧．

1．简单根式代换

【例 4-2-20】　求不定积分 $\int\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$．

解　令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=1+t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，因而有

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{1+t^2}\cdot2t\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2(t-\arctan t)+C$$

$$= 2\left(\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}\right) + C$$

【例 4-2-21】 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t} t\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t+1)-1}{1+t} \mathrm{d}t$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = t - \ln|t+1| + C$$

代回 $t=\sqrt{2x+1}$，并注意到 $\sqrt{2x+1}+1>0$，因此

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1} \mathrm{d}x = \sqrt{2x+1} - \ln(\sqrt{2x+1}+1) + C$$

从以上例子可以看出，简单根式代换法常用于求被积函数中含有根式，并且根式的形式为 $\sqrt[n]{ax+b}$ 的不定积分.

2. 三角代换

【例 4-2-22】 求不定积分 $\int \sqrt{a^2-x^2} \mathrm{d}x (a>0)$.

解 用三角公式 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 消去根式.

设 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t, \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$$

于是

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \mathrm{d}x = \int a\cos t \cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

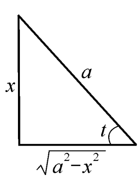

图 4-3

由 $x=a\sin t$ 或 $\sin t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形如图 4-3 所示. 由图可知 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，代入上式得

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

【例 4-2-23】 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \mathrm{d}x (a>0)$.

解 利用三角公式 $1+\tan^2 t = \sec^2 t$ 化去根式.

设 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，故

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t$$
$$= \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t| + C_1$$

根据 $\tan t=\dfrac{x}{a}$，作辅助三角形如图 4-4 所示，得

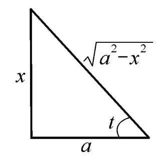

图 4-4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln|\sec t+\tan t| + C_1$$
$$= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

其中 $C=C_1-\ln a$.

【例 4-2-24】　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x(a>0)$.

解　利用三角公式 $\sec^2 t-1=\tan^2 t$ 化去根式.

设 $x=a\sec t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$，$\mathrm{d}x=a\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$，故

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t$$
$$= \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t| + C_1$$

根据 $\sec t=\dfrac{x}{a}$，作辅助三角形如图 4-5 所示，得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|\sec t+\tan t| + C_1$$
$$= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

其中 $C=C_1-\ln a$.

从以上的例子可以看出，三角代换常用于求解被积函数为二次根式的不定积分.

以上三例使用的代换称为三角代换，归纳如表 4-1 所示.

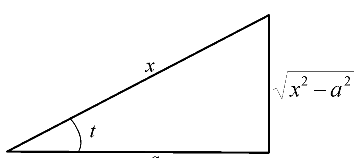

图 4-5

表 4-1

被积函数含有	作 代 换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$

由于三角代换的回代过程比较麻烦，所以，若能直接用公式或凑微分来积分，我们就避免用三角代换. 例如

$$\int x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}(4-x^2)$$

这比使用变换 $x=2\sin t$ 来计算简便得多.

作为基本积分公式的补充，有下列公式：

(14) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

(15) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(16) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec + \tan x| + C$；

(17) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

(18) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

(19) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$；

(20) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$；

(21) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (a > 0)$；

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0)$.

练一练：

求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{2 + \sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【研讨题】 在十字路口的交通管制中，亮红灯之前要亮一段时间的黄灯，这是为了让正在行驶在十字路口的驾驶员注意，红灯即将亮起，如果你能停住应当马上刹车，以免闯红灯违反交通规则，那么黄灯应该亮多久才合适？

习题 4-2

A. 基本题

1. 填空使等号成立.

(1) $\mathrm{d}x = (\quad)\mathrm{d}(1-7x)$；　(2) $x^2\mathrm{d}x = (\quad)\mathrm{d}(3x^3-1)$；

(3) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = (\quad)\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$；　(4) $\sin\frac{2}{3}x\mathrm{d}x = (\quad)\mathrm{d}(\cos\frac{2}{3}x)$；

(5) $\frac{\mathrm{d}x}{x} = (\quad)\mathrm{d}(1-5\ln x)$；　(6) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2} = (\quad)\mathrm{d}(\arctan 3x)$；

(7) $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = (\quad)\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$；　(8) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = (\quad)\mathrm{d}(1-\arcsin x)$.

2. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int (1-3x)^5\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}}$；

(4) $\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int e^{e^x+x}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

B. 一般题

3. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int e^{-3x+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 3x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \tan(2x-5)\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$；　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；

(7) $\int \tan^5 x\sec^2 x\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；　(5) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{2-\sqrt{2x+3}}{1-2x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

C. 提高题

6. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$；　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

7. 设 $f'(\ln x)=1+x$，求 $f(x)$.

4.3　分部积分法

积分为求导的逆运算. 对应于求导法则中的和、差运算，我们介绍了直接积分法；对应于求复合函数的链式法则，我们介绍了换元积分法. 它们都是重要的积分方法，但对于某些类型的积分，它们往往不能奏效，如 $\int x\cos x\mathrm{d}x$，$\int e^x\cos x\mathrm{d}x$，$\int \ln x\mathrm{d}x$ 等等. 为此，下面将给出建立在求导乘法法则基础上的一种积分方法——分部积分法.

由两个函数之积的导数公式

$$(uv)'=u'v+uv'$$

得
$$uv'=(uv)'-u'v$$

两边求不定积分，有
$$\int uv'\mathrm{d}x=\int[(uv)'-u'v]\mathrm{d}x=\int(uv)'\mathrm{d}x-\int u'v\mathrm{d}x$$

即
$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

上式称为**分部积分公式**.它的特点是把左边积分$\int u\mathrm{d}v$换为了右边积分$\int v\mathrm{d}u$，如果$\int v\mathrm{d}u$比$\int u\mathrm{d}v$容易求，就可以试用此法.

一般地，若被积函数为不同类函数的乘积，则要用分部积分法.下面通过例题来说明如何运用这个重要公式.

【例 4-3-1】 求不定积分$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解 如何选择u和v呢？

方法一 选x为u，
$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x&=\int x\mathrm{d}(\sin x)\\&=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x\\&=x\sin x+\cos x+C\end{aligned}$$

此种选择是成功的.

方法二 如果选$\cos x$为u，结果会怎样呢？
$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{1}{2}x^2\cos x+\int\frac{1}{2}x^2\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

比较一下不难发现，被积函数中x的幂次反而升高了，积分的难度增大，这样选择u是不适合的.所以在应用分部积分法时，恰当选取u是一个关键.选取u一般要考虑下面两点：

(1) v要容易求得；　(2) $\int v\mathrm{d}u$比$\int u\mathrm{d}v$容易求得.

关于u的选取规则，我们给出这样一句口诀：**五指山上觅对象—反常**."指"表示指数函数；"山"表示三角函数；"觅"表示幂函数；"对"表示对数函数；"反"表示反三角函数.一般地，两种不同类型函数乘积的不定积分，按照口诀的顺序，谁排在后面谁做u，谁做u谁不变，剩下的那个函数和$\mathrm{d}x$凑微分.

【例 4-3-2】 求$\int x\sin x\mathrm{d}x$.

解 被积函数是幂函数x和三角函数$\sin x$的乘积，根据口诀顺序，"觅(幂)"排在"山(三)"的后面，故选取幂函数x做u.又因$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$，故
$$\begin{aligned}\int x\sin x\mathrm{d}x&=-\int x\mathrm{d}\cos x\\&=-\left(x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)\\&=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x\\&=-x\cos x+\sin x+C\end{aligned}$$

【例 4-3-3】 求 $\int x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

解　被积函数是幂函数 x 和指数函数 e^{3x} 的乘积，根据口诀顺序，“觅(幂)”排在“指”的后面，故选取幂函数 x 做 u. 又因 $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\mathrm{d}\mathrm{e}^{3x}$，故

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})=\frac{1}{3}\left(x\mathrm{e}^{3x}-\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{3}\left[x\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x)\right]\\ &= \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}+C\end{aligned}$$

【例 4-3-4】 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解　被积函数是幂函数 x 和对数函数 $\ln x$ 的乘积，根据口诀顺序，“对”排在“觅(幂)”的后面，故选取对数函数 $\ln x$ 做 u. 又因 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$，故

$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^2\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int x^2\mathrm{d}\ln x\right)\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C\end{aligned}$$

【例 4-3-5】 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　被积函数是幂函数 x 和反三角函数 $\arctan x$ 的乘积，根据口诀顺序，“反”排在“觅(幂)”的后面，故选取反三角函数 $\arctan x$ 做 u. 又因 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$，故

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\arctan x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C\end{aligned}$$

【例 4-3-6】 求 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解　因为被积函数是单一函数，就可以看做被积表达式已经自然分成 $u\mathrm{d}v$ 的形式了，直

接应用分部积分公式,得

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

【例 4-3-7】 求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解 同上例

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\mathrm{d}x &= x\arcsin x - \int x\mathrm{d}\arcsin x \\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2) \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

练一练:

求下列各不定积分.

(1) $\int x\sec^2 x\mathrm{d}x$;　(2) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　(3) $\int x\operatorname{arccot} x\mathrm{d}x$;　(4) $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

有时须经过几次分部积分才能得出结果;有时经过几次分部积分后,又会还原到原来的积分,此时通过移项、合并求出积分.

【例 4-3-8】 求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

右端的积分再次用分部积分公式,得

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$

【例 4-3-9】 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x &= \int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x \\ &= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x\end{aligned}$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \mathrm{d}x$$

得到一个关于所求积分 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$ 的方程，解出得

$$2\int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x (\sin x - \cos x) + C_1$$

所以
$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

其中 $C = \frac{1}{2}C_1$.

有些不定积分需要综合运用换元积分法和分部积分法才能求解.

【例 4-3-10】 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，于是有

$$\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int e^t \cdot 2t\mathrm{d}t = 2e^t (t-1) + C$$
$$= 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C$$

练一练：

求下列各不定积分.

(1) $\int x^2 \sin x \mathrm{d}x$；　(2) $\int e^x \cos x \mathrm{d}x$；　(3) $\int \cos \sqrt{x} \mathrm{d}x$.

【研讨题】某人身高 2 m，在地球上可跳过与其身高相同的高度. 假设他以相同的初速度在月球上跳，请问能跳多高？另外，为了能在月球上跳过 2 m，问他的初速度应为多少？

习题 4-3

A. 基本题

1. 求下列不定积分.

(1) $\int x e^{2x} \mathrm{d}x$；　(2) $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$；

(3) $\int x \cos 2x \mathrm{d}x$；　(4) $\int (x^2 - 1)\cos x \mathrm{d}x$.

B. 一般题

2. 求下列不定积分.

(1) $\int x \cos x \sin x \mathrm{d}x$；　(2) $\int \ln^2 x \mathrm{d}x$；　(3) $\int x^2 e^{-x} \mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$.

C. 提高题

3. 求下列不定积分.

(1) $\int e^{\sqrt{2x-1}} \mathrm{d}x$；　(2) $\int e^{-x} \cos x \mathrm{d}x$；

4. 如果函数 $f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\ln x}{x}$,试求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

4.4* 简单有理函数的积分

4.4.1 简单有理函数的积分

有理函数是指两个多项式之商的函数,即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}\ (a_n\neq 0,\ b_m\neq 0)$$

当 $m<n$ 时,称为**有理真分式**,当 $m\geqslant n$ 时,称为**有理假分式**. 任何一个假分式都可以通过多项式除法化成一个多项式和一个真分式之和,例如:

$$\frac{x^5+x-1}{x^3-x}=x^2+1+\frac{2x-1}{x^3-x}$$

有理函数的积分就是多项式和真分式的积分. 多项式的积分是很容易的,真分式的积分必须首先把有理真分式分解成部分分式之和,下面我们讨论怎样将真分式分解成部分分式之和.

n 次实系数多项式 $Q(x)$在实数范围内总可以分解成一次因式与二次因式的乘积.

当 $Q(x)$只有一次因式$(x-a)^k$ 时,分解后有下列 k 个部分分式之和:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$为待定常数.

当 $Q(x)$只有二次因式$(x^2+px+q)^s$, 其中 $p^2-4q<0$,分解后有下列 s 个部分分式之和:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+px+q}$$

其中 $M_1,M_2,\cdots,M_s,N_1,N_2,\cdots,N_s$为待定常数.

当 $Q(x)$既有因式$(x-a)^k$ 又有因式$(x^2+px+q)^s$ 时,分解后有下列 $k+s$ 个部分分式之和:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^s}\\&+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)}\end{aligned}$$

例如

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+x+2)^2}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+2)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+2}$$

真分式经过上面的分解后,它的积分就容易求出了.

【例 4-4-1】 求$\displaystyle\int\frac{x^5+x-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$.

解 由多项式除法得$\dfrac{x^5+x-1}{x^3-x}=x^2+1+\dfrac{2x-1}{x^3-x}$

按真分式分解定理,可设$\dfrac{2x-1}{x^3-x}=\dfrac{2x-1}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

去分母,得

$$2x-1=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

合并同类项,得

$$2x-1=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$$

比较两端同次幂的系数,得方程组

$$\begin{cases}A+B+C=0\\B-C=2,\\-A=-1.\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}A=1\\B=\dfrac{1}{2}\\C=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

于是,
$$\frac{2x-1}{x^3-x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}$$

这种求待定常数 A、B、C 的方法称为**待定系数法**.

求 A、B、C 有更简捷地方法,在恒等式 $2x-1=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$ 中,令 $x=0$,得 $A=1$;令 $x=1$,得 $B=\dfrac{1}{2}$;令 $x=-1$,得 $C=-\dfrac{3}{2}$. 显然,求得 A、B、C 的值是相同的.

最后,原积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5+x-1}{x^3-x}\mathrm{d}x&=\int\left[x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}x^3+x+\ln|x|+\ln\sqrt{|x-1|}-\ln\left|(x+1)\sqrt{|x+1|}\right|+C\\&=\frac{1}{3}x^3+x+\ln\left|\frac{x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|+C\end{aligned}$$

【例 4-4-2】 求 $\displaystyle\int\frac{5x-3}{x^2-6x-7}\mathrm{d}x$.

解 分解真分式,$\dfrac{5x-3}{x^2-6x-7}=\dfrac{5x-3}{(x-7)(x+1)}=\dfrac{A}{x-7}+\dfrac{B}{x+1}$

去分母,得

$$5x-3=A(x+1)+B(x-7)$$

令 $x=7$,得 $A=4$;令 $x=-1$,得 $B=1$,故有

$$\frac{5x-3}{x^2-6x-7}=\frac{4}{x-7}+\frac{1}{x+1}$$

两端求积分得

$$\begin{aligned}\int\frac{5x-3}{x^2-6x-7}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{4}{x-7}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=4\ln|x-7|+\ln|x+1|+C=\ln|(x-7)^4(x+1)|+C\end{aligned}$$

4.4.2 三角函数有理式的积分

对三角函数($\sin x$ 或 $\cos x$)只施行四则运算得到的式子称为**三角函数有理式**,记为 $R(\sin x,\cos x)$. 它的积分记为

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$

下面我们就来解决这个积分问题.

因为 $\sin x=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$, $\quad\cos x=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$

所以可令 $\tan\dfrac{x}{2}=t, x=2\arctan t, \mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}, \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. 那么有

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

显然,上式右端就是关于 t 的有理函数的积分了.

【例 4-4-3】 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$,得

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int\frac{2\mathrm{d}t}{1+2t-t^2} = -2\int\frac{\mathrm{d}(1-t)}{2-(1-t)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-t-\sqrt{2}}{1-t+\sqrt{2}}\right|+C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}-\tan\dfrac{x}{2}}{1+\sqrt{2}-\tan\dfrac{x}{2}}\right|+C
\end{aligned}$$

上述代换又称**万能代换**. 这种代换虽然能普遍使用,但是不一定是最简捷的代换,有些三角函数有理式积分采用其他方法更容易.

【例 4-4-4】 求 $\displaystyle\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 凑微分很快求出积分,即

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)=\ln|\sin x+\cos x|+C$$

最后我们尚需指出,初等函数在其定义域内必存在原函数,但是某些初等函数的原函数却不再是初等函数,例如 $\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x, \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}, \int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x, \int\sin x^2\mathrm{d}x, \int x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$($\alpha$ 不是整数)等等. 它们的原函数就都不是初等函数,我们常称这些积分是"积不出来"的.

练一练:

求下列各不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int\frac{x-5}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int\frac{\sin x+1}{\sin x(\cos x+1)}\mathrm{d}x$.

习题 4-4

A. 基本题

1. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{(1+x)(2+x)}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{4x-2}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x^3-4x^2+2x+9}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

B. 一般题

2. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$；

(3) $\int \frac{1}{1+2\tan x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{1}{1+2\tan x}\mathrm{d}x$.

C. 提高题

3. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

4.5　不定积分—综合应用实例

实例 1(物体降落问题)　一个物体从一个上升的飞行器上掉落，当时飞行器位于离地面 5.6 m 高空，正以 7 m/s 的速度上升，问多长时间该物体落到地面？

解　设在时刻 t，物体的速度为 $v(t)$，离地面高度为 $s(t)$. 地球表面附近的重力加速度为 9.8 m/s^2. 假设没有另外的力作用在下落的物体上，我们有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-9.8\ (\text{负号是因为重力作用于高度 } s \text{ 减小的方向}),$$

及条件 $v(0)=7$. 这就是物体运动的数学模型.

对等式 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-9.8$ 两边同时取不定积分可得 $v=\int -9.8\mathrm{d}t=-9.8t+C_1$，将条件 $v(0)=7$ 代入上式可得 $C_1=7$. 于是物体下落的速度为

$$v=-9.8t+7$$

因为速度是高度的导数，即 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，当 $t=0$ 时物体掉落，当时位于离地面 5.6 m 高空，所以我们可建立如下的数学模型

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-9.8t+7\\ s(0)=5.6\end{cases}$$

同样在方程$\frac{ds}{dt}=-9.8t+7$两边同时取不定积分可得

$$s=\int(-9.8t+7)\mathrm{d}t=-4.9t^2+7t+C_2$$

将条件 $s(0)=5.6$ 代入上式可得 $C_2=5.6$. 所以在时刻 t 物体离地面的高度为

$$s=-4.9t^2+7t+5.6$$

为了求该包裹落到地面的时间，令 $s=0$，即

$$-4.9t^2+7t+5.6=0$$

求得 $t_1=2, t_2=-\frac{4}{7}$(舍去).

所以物体从气球上掉落后 2 s 落到地面.

实例 2(生产成本) 制造商通过各种生产实验发现产品的边际成本是由函数 $MC=2q+6$(千元/台)确定的，式中 q 是产品的单位数量. 已知生产的固定成本为 10 千元，求产品的生产成本.

解 生产成本的导数 $C'(q)$ 是边际成本 MC，即 $C'(q)=2q+6$.

所以
$$C(q)=\int(2q+6)\mathrm{d}q=q^2+6q+C$$

根据固定成本的含义知 $C(0)=10$，代入上式可得 $C=10$.

故满足条件的生产成本为
$$C(q)=q^2+6q+10$$

实例 3(企业投资) 现对某个企业给予一笔投资 A，经过测算，该企业在 T 年中可以按每年 a 的均匀应收入率取得收入. 若年利率为 r，试求

(1) 该投资的纯收入贴现值；

(2) 收回该笔投资的时间是多少?

解 (1) 因收入率为 a，年利率为 r，故投资后所获得的总收入现值为

$$y=\int a\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=-\frac{a}{r}\int\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}(-rt)=-\frac{a}{r}\mathrm{e}^{-rt}+C$$

又 $t=0$ 时，$y=0$，代入上式，得 $C=\frac{a}{r}$.

即
$$y=-\frac{a}{r}\mathrm{e}^{-rt}+\frac{a}{r}=\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rt})$$

故投资后的 T 年中获得的纯收入贴现值为

$$R=y(T)-A=\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rT})-A$$

(2) 收回投资，即总收入的现值等于投资，于是有

$$\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rt})=A$$

解得 $t=\frac{1}{r}\ln\frac{a}{a-Ar}$，即收回投资的时间为 $t=\frac{1}{r}\ln\frac{a}{a-Ar}$.

实例 4(结冰厚度) 美丽的冰城常年积雪，滑冰场完全靠自然结冰，结冰的速度由函数 $\frac{dy}{dt}=k\sqrt{t}$ ($k>0$ 为常数)所确定，其中 y 是从结冰起到时刻 t 冰的厚度，求结冰厚度 y 关于时间 t 的函数.

解 根据题意，结冰厚度 y 关于时间 t 的函数为

$$y=\int kt^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}kt^{\frac{3}{2}}+C$$

其中常数 C 是结冰的时间所决定. 如果 $t=0$ 时刻开始结冰的厚度为 0,即 $y(0)=0$. 代入上式可得 $C=0$,所得函数为 $y=\frac{2}{3}kt^{\frac{3}{2}}$,即为结冰厚度关于时间的函数.

复习题 4
(历年专插本考试真题)

一、单项选择题

1. (2015/3) 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任一原函数,C 为任意常数,则 $\int f(2x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $F(x)+C$　　B. $F(2x)+C$　　C. $\frac{1}{2}F(2x)+C$　　D. $2F(2x)+C$

2. (2013/6) 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)\ (x\in R)$,则下列等式成立的是(　　).

A. $\int\frac{1}{x}F(2\ln x+1)\mathrm{d}x=2f(2\ln x+1)+C$

B. $\int\frac{1}{x}F(2\ln x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2\ln x+1)+C$

C. $\int\frac{1}{x}f(2\ln x+1)\mathrm{d}x=2F(2\ln x+1)+C$

D. $\int\frac{1}{x}f(2\ln x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F(2\ln x+1)+C$

3. (2009/4) 积分 $\int\cos xf'(1-2\sin x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $2f(1-2\sin x)+C$　　B. $\frac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

C. $-2f(1-2\sin x)+C$　　D. $-\frac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

4. (2008/4) 下列函数中,不是 $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$ 的原函数的是(　　).

A. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})^2$　　B. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})^2$

C. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$　　D. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$

5. (2007/3) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数,下列等式不成立的是(　　).

A. $\int\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=F(\ln x)+C$　　B. $\int\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x=F(\sin x)+C$

C. $\int 2xf(x^2+1)\mathrm{d}x=F(x^2+1)+C$　　D. $\int 2^xf(2^x)\mathrm{d}x=F(2^x)+C$

6. (2005/2) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,且 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+c$,则 $\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$

(　　).

A. $-2e^{x^2}$　　B. $2e^x+c$　　C. $-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$　　D. $\frac{1}{2}e^x+c$

二、填空题

1.(2012/二.7)若 $f(x)=\int\frac{\tan x}{x}dx$,则 $f''(\pi)=$ ________.

2.(2003/一.8)若 $f(x)$的一个原函数为 xe^{-x},则 $f(x)=$ ________.

3.(2001/一.6)计算$\int x^2f(x^3)\cdot f'(x^3)dx=$ ________.

三、计算题

1.(2015/14)计算不定积分$\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$.

2.(2014/14)计算不定积分$\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx$.

3.(2013/15)计算不定积分$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

4.(2012/14)计算不定积分$\int\ln(1+x^2)dx$.

5.(2011/14)计算不定积分$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx(x>1)$.

6.(2010/14)计算不定积分$\int\frac{\cos x}{1-\cos x}dx$.

7.(2009/14)计算不定积分$\int\arctan\sqrt{x}dx$.

8.(2008/14)求不定积分$\int\frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx$.

9.(2007/14)计算不定积分$\int\left[2^x-\frac{1}{(3x+2)^3}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right]dx$.

10.(2006/12)计算不定积分$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

11.(2005/15)计算不定积分$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x.}}-\frac{1}{x}+3^x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.