



定积分的换元 积分法



本节概要

S U M M A R Y

由牛顿—莱布尼兹公式，定积分计算转化为不定积分计算。在不定积分可积及相应定积分存在的条件下，不定积分运算法则大都可直接转化为相应的定积分运算法则。

由于不定积分计算重在确定原函数形式，而定积分计算目的是求值，故在计算时，二者仍有一些差别，这种差别主要体现在第二换元法则上。

本节课主要学习定积分的换元积分法及其应用。



定积分的换元积分法

(1) 分项积分法则的转换

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx .$$

因此不定积分分项积分法则可直接转换为定积分的分项积分法则。

如 $\int_0^1 (x^2 + e^x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 e^x dx$

定积分的换元积分法

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

思考：复合函数的定积分如何求解？

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int_a^b e^{2x} dx \neq e^{2x} \Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \cos 3x dx \neq \sin 3x \Big|_0^1$$

$$\int_a^b e^{2x} d(2x) = e^{2x} \Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \cos 3x d(3x) = \sin 3x \Big|_0^1$$

原函数

原函数

定积分的换元积分法

(2) 基本积分公式的形式不变性

$$\int \cos(x^2) d(x^2) = \sin(x^2) + C$$

$$\int e^{2x} d(2x) = e^{2x} + C$$

如何“统一单位”呢？

定积分的换元积分法

(3) 凑微分法则的转换

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ ， $\varphi(x)$ 可微，则有不定积分凑微分法则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \right]_a^b$$

不定积分

$$= \left(F[\varphi(x)] \right)_a^b$$

凑微分：1. $\cos x dx = d(\sin x)$ ； 2. $\sin x dx = d(-\cos x)$ ；

$$3. x dx = d\left(\frac{1}{2} x^2\right); \quad 4. x^2 dx = d\left(\frac{1}{3} x^3\right);$$

$$f(x) dx = d[f(x)\text{的原函数}]$$

定积分的

(4) 第二

根据牛顿-莱布
值进行计算。
用第二类换元

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left(\frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} \right) \Big|_0^3 = \frac{8}{3}$$

The screenshot shows the MATLAB environment. The Command Window on the right contains the following code and output:

```
>> syms x
>> int(x/(sqrt(1+x)), 0, 3)
ans =
8/3
>>
```

The Workspace window on the left shows the following variables:

Name	Value	Class
ans	<1x1 sym>	sym
x	<1x1 sym>	sym



定积分第二换元积分法则

定理

定积分第二换元法则

假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件

(1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi \subset [a, b]$ ，则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt .$$

换元就要换限

解:

The image shows a MATLAB interface with a workspace and a command window. The workspace contains two variables: 'ans' and 'x', both of type 'sym' and value '<1x1 sym>'. The command window shows the following commands and output:

```
>> syms x
>> int((sin(x))^4*cos(x), 0, pi/2)
ans =
1/5
>>
```

确定

接求出定积分的值

不换元就不换限

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d \sin x = \frac{1}{5} \sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}$$

练习：计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$.

令 $t = \cos x$,

解：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_1^0 t^3 d(t)$$

$$\begin{cases} x=0, & t=\cos 0=1 \\ x=\frac{\pi}{2}, & t=\cos \frac{\pi}{2}=0 \end{cases}$$

$$= -\int_1^0 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

不换元

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{4} \cos^4 \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} \cos^4 0 \right) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

例题示范(第二类换元法) 根式代换

例2 计算定积分 $\int_3^4 x\sqrt{x-3}dx$

换元就要换限

解: 令 $t = \sqrt{x-3}$, 于是 $x = t^2 + 3, dx = 2tdt$

$$\begin{array}{l} x=3, t=\sqrt{3-3}=0 \\ x=4, t=\sqrt{4-3}=1 \end{array}$$

$$\int_3^4 x\sqrt{x-3}dx = \int_0^1 (t^2 + 3)t \cdot 2tdt = 2 \int_0^1 (t^4 + 3t^2)dt$$

$$= 2 \left(\frac{t^5}{5} + t^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{12}{5}$$

例题示范（第二类换元法）

例2 计算定积分 $\int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

换元就要换限

解： 令 $t = \sqrt[3]{x}$, $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$, $\begin{cases} x = 0, & t = \sqrt[3]{0} = 0 \\ x = 8, & t = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+t} \cdot 3t^2 dt$$

$$= 3 \int_0^2 \frac{(t^2 - 1) + 1}{1+t} dt = 3 \int_0^2 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln|1+t| \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3$$

换元法的本质

$$\varphi(x) \longrightarrow t$$

第一类换元法

$$\text{令 } \sin x = t,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x)$$

$$= \int_0^1 t^4 dt$$

$$x \longrightarrow \psi(t)$$

第二类换元法

$$\text{令 } t = \sqrt{1+x}, \text{ 即 } x = t^2 - 1$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

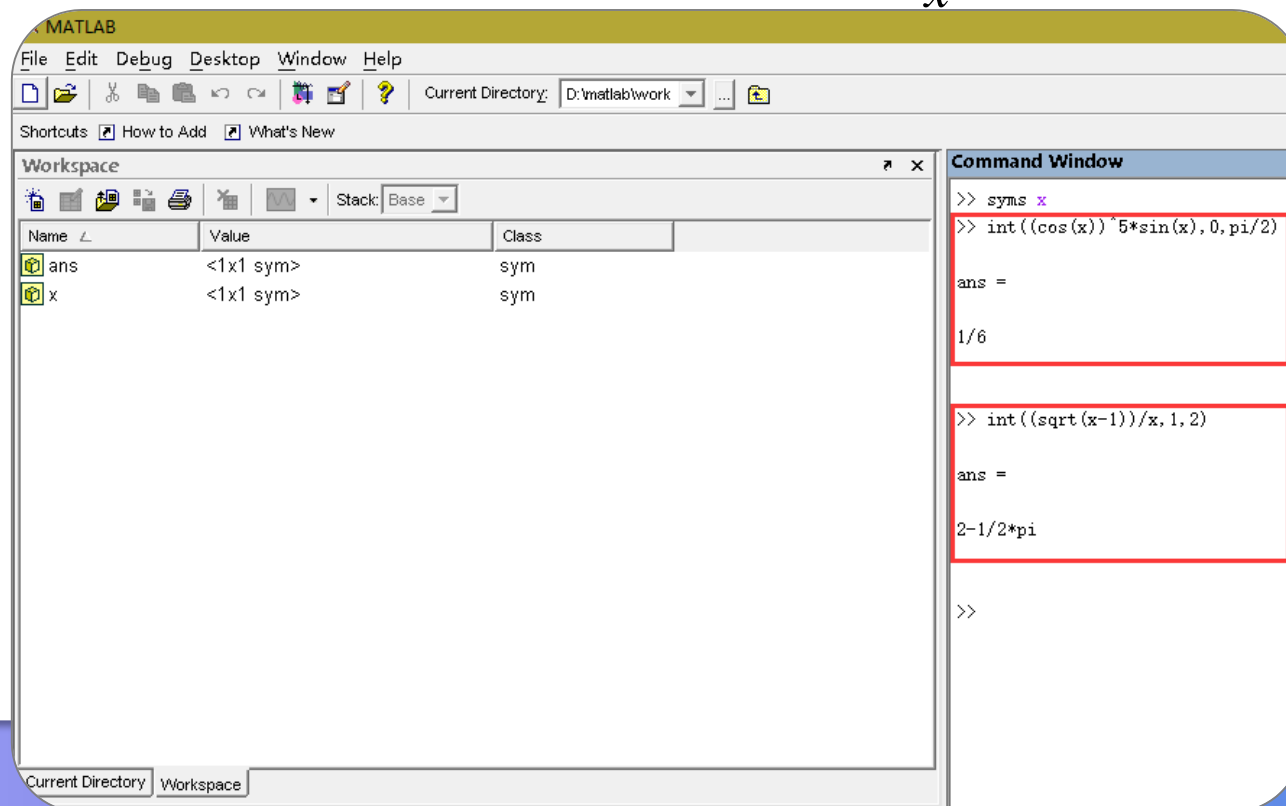
$$= \int_1^2 2(t^2 - 1) dt$$

换元法的本质

函数 \longleftrightarrow 变量

课中任务1

计算定积分： (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$ (2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$



The screenshot shows the MATLAB interface with the Command Window and Workspace. The Command Window contains the following code and output:

```
>> syms x
>> int((cos(x))^5*sin(x), 0, pi/2)
ans =
1/6

>> int((sqrt(x-1))/x, 1, 2)
ans =
2-1/2*pi

>>
```

The Workspace window shows the following variables:

Name	Value	Class
ans	<1x1 sym>	sym
x	<1x1 sym>	sym

课中任务解答

(1) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解 令 $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$,

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \frac{t^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

课中任务解答

$$(2) \text{ 求 } \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

解 令 $\sqrt{x-1}=t$ ，则 $dx=2tdt$ ，且当 $x=1$ 时，
 $t=0$ ；当 $x=2$ 时， $t=1$ 。所以有

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

思考题

- (1) 应用换元积分法计算定积分需注意什么？
- (2) 如何将不定积分的分部积分法运用到定积分的计算中？
- (3) 如何理解定积分的分部积分法？



5

课堂小结

Class summary Training



课堂小结

1. 第一类换元积分法 (函数 \rightarrow 变量)
2. 第二类换元积分法 (函数 \leftarrow 变量)
3. 典型问题
 - (1) 公式应用；
 - (2) 数学建模软件使用。

思考题

- (1)积分上限函数是否可以看作是原函数？
- (2)如果用原函数的方法来计算定积分，最重要因素是什么？
- (3)牛顿-莱布尼茨公式与积分上限函数有什么关系？

作答



同学们！下课啦！ 谢谢欣赏！

Accounting and Finance Knowledge Training

