定积分的换元积分法

本节概要

SUMMARY

由牛顿—莱布尼兹公式，定积分计算转化为不定积分计算。在不定积分可积及相应定积分存在的条件下，不定积分运算法则大都可直接转化为相应的定积分运算法则。

由于不定积分计算重在确定原函数形式，而定积分计算目的是求值，故在计算时，二者仍有一些差别，这种差别主要体现在第二换元法则上。

本节课主要学习定积分的换元积分法及其应用。

定积分的换元积分法

(1) 分项积分法则的转换

$$\int [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x \pm \int g(x) \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \mathrm{d}x .$$

因此不定积分分项积分法则可直接转换为定积分的分项积分法则。

如 $$\int_0^1 (x^2 + e^x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 e^x dx$$

定积分的换元积分法

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

思考：复合函数的定积分如何求解？

$$\int e^{\boxed{x}} d\boxed{x} = e^{x} + C$$

$$\int \cos \boxed{x} d\boxed{x} = \sin x + C$$

$$\int_a^b e^{\boxed{2x}} d\boxed{x} \overset{?}{\cancel{=}} e^{2x}\Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \cos \boxed{3x} d\boxed{x} \overset{?}{\cancel{=}} \sin 3x\Big|_0^1$$

$$\int_a^b e^{2x} d(2x) = e^{2x}\Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \cos 3x d(3x) = \sin 3x\Big|_0^1$$

原函数

原函数

定积分的换元积分法

(2) 基本积分公式的形式不变性

$$\int \cos\left(x^2\right) d\left(x^2\right) = \sin\left(x^2\right) + C$$

$$\int e^{(2x)} d(2x) = e^{(2x)} + C$$

如何"统一单位"呢？

定积分的换元积分法

(3) 凑微分法则的转换

若 $f(x)$有原函数 $F(x)$，$\varphi(x)$可微，则有不定积分凑微分法则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \boxed{\left[\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\right.}\Big|_a^b$$

不定积分

$$= \boxed{\left(F[\varphi(x)]\right)}\Big|_a^b$$

凑微分：1.$\cos x dx=d(\sin x)$;　2.$\sin x dx=d(-\cos x)$;

3.$x dx=d(\frac{1}{2}x^2)$;　4.$x^2 dx=d(\frac{1}{3}x^3)$;

$$f(x)dx = d[\,f(x)\text{的原函数}\,]$$

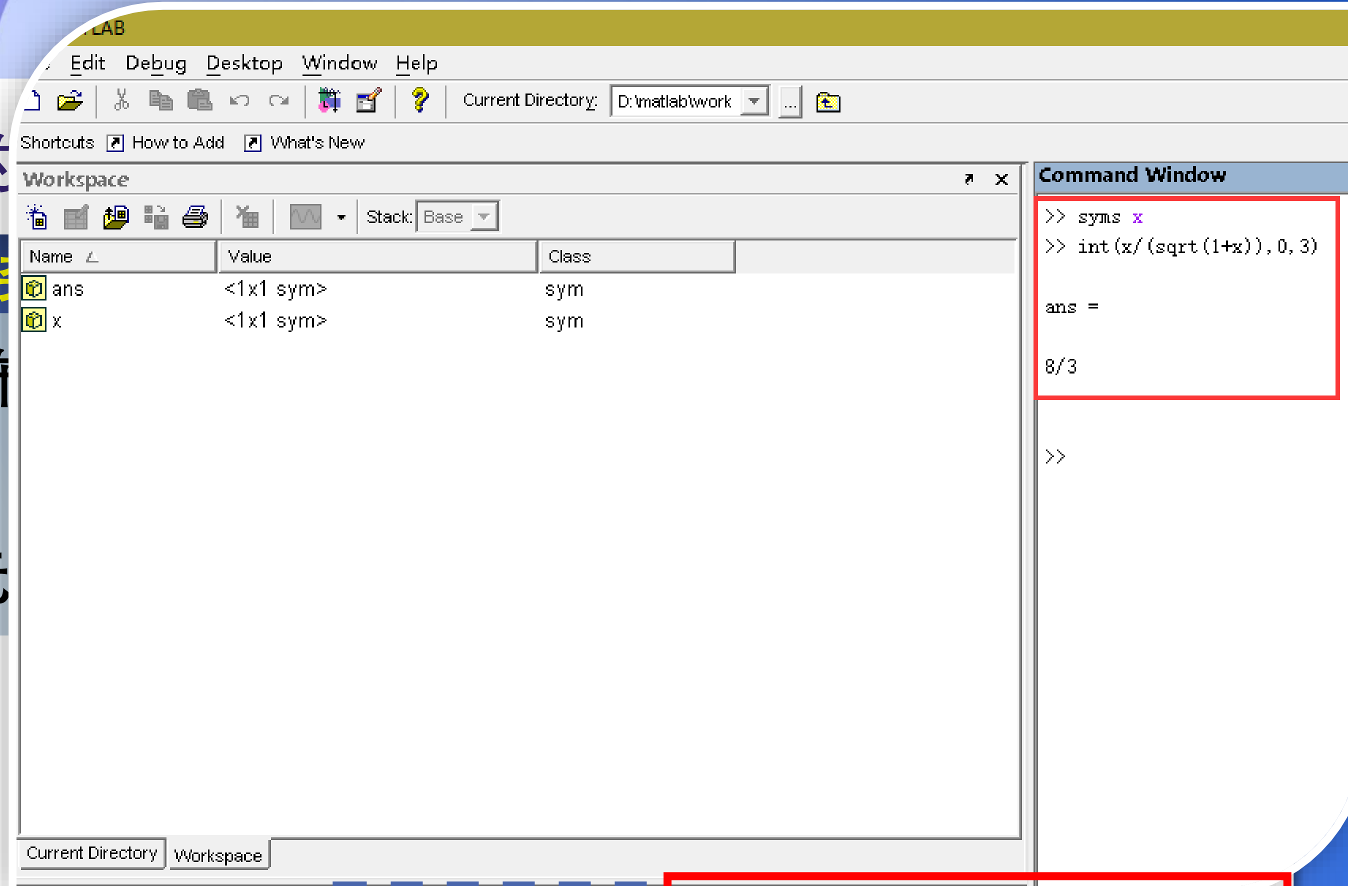
定积分的

(4) 第二

根据牛顿-莱布

值进行计算。

用第二类换元



$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$\int \frac{t^2-1}{\cancel{t}} 2\cancel{t}dt$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \boxed{\left(\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x}\right)}\Bigg|_0^3 = \frac{8}{3}$$

定积分第二换元积分法则

定理 定积分第二换元法则

假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件

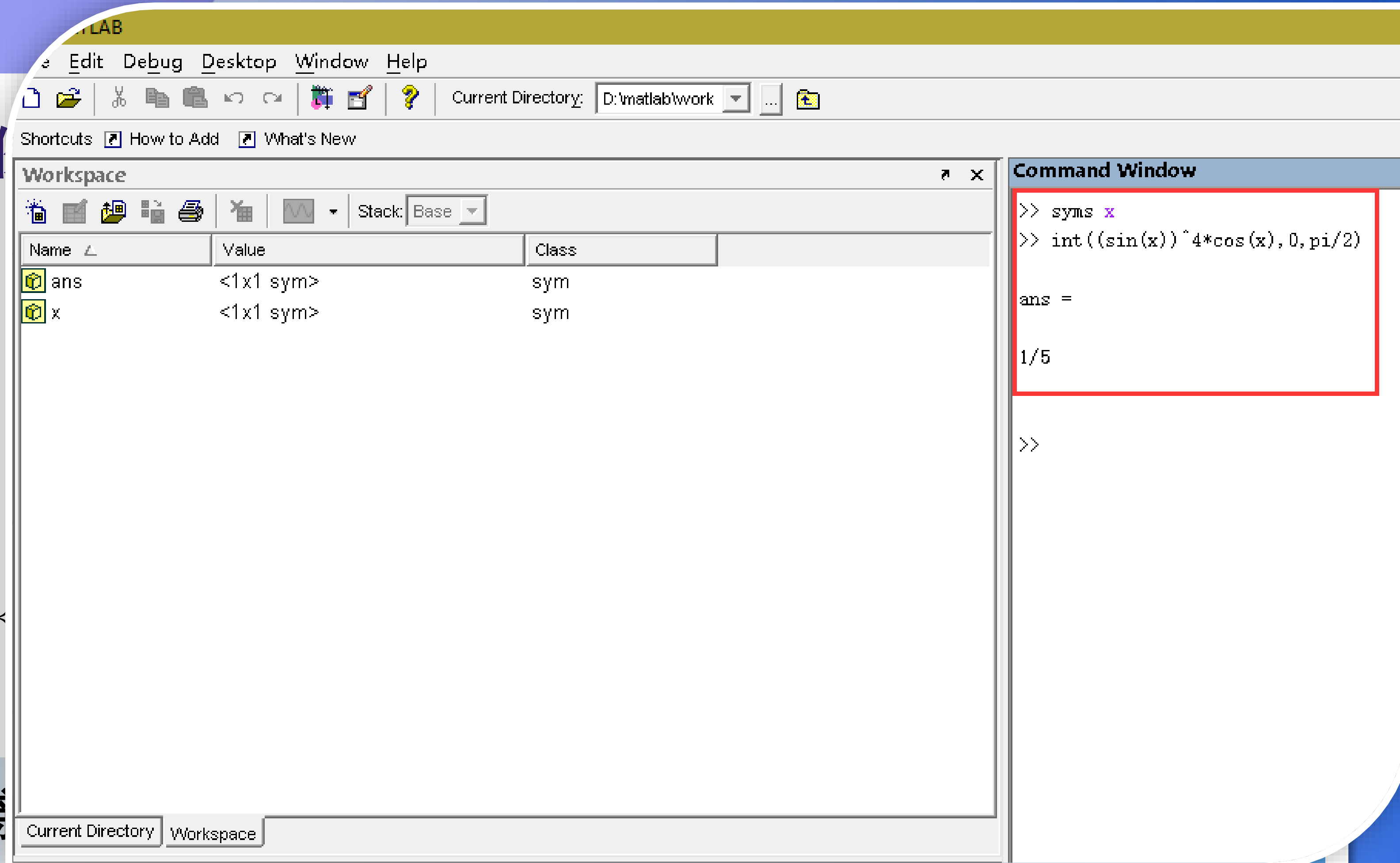
(1) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$ ；

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi\subset[a,b]$，则有

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(\boxed{x})\,\mathrm{d}x=\int_{\boxed{\alpha}}^{\boxed{\beta}} f[\varphi(\boxed{t})]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t .$$

换元就要换限

解:



确定

接求出定积分的值

不换元就不换限

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d = \frac{1}{5}\sin^5 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}$$

练习：计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx.$

令 $t = \cos x,$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_1^0 t^3 d(t)$

$$\begin{cases} x = 0, \quad t = \cos 0 = 1 \\ x = \frac{\pi}{2}, \quad t = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$= -\int_1^0 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

不换元

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{4}\text{co} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 0\right)\right.$$

例题示范(第二类换元法) 根式代换

例2 计算定积分 $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$

换元就要换限

解:令 $t=\sqrt{x-3}$, 于是 $x=t^2+3, dx=2tdt$

$x=3,\quad t=\sqrt{3-3}=0$

$x=4,\quad t=\sqrt{4-3}=1$

$$\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx=\int_0^1 (t^2+3)t\,2tdt=2\int_0^1 (t^4+3t^2)dt$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{12}{5}$$

例题示范（第二类换元法）

例2 计算定积分 $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

换元就要换限

解：

令 $t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3, dx=3t^2dt,$ $\begin{cases} x=0,\ \ t=\sqrt[3]{0}=0 \\ x=8,\ \ t=\sqrt[3]{8}=2 \end{cases}$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+t} 3t^2dt$$

$$=3\int_0^2 \frac{(t^2-1)+1}{1+t}dt=3\int_0^2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=3(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|1+t|)\Big|_0^2=3\ln 3$$

换元法的本质

$\varphi(x) \Rightarrow t$

第一类换元法

令 $\sin x = t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x)$$

$$= \int_0^1 t^4 dt$$

$x \Rightarrow \psi(t)$

第二类换元法

令 $t = \sqrt{1+x}$, 即 $x = t^2 - 1$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

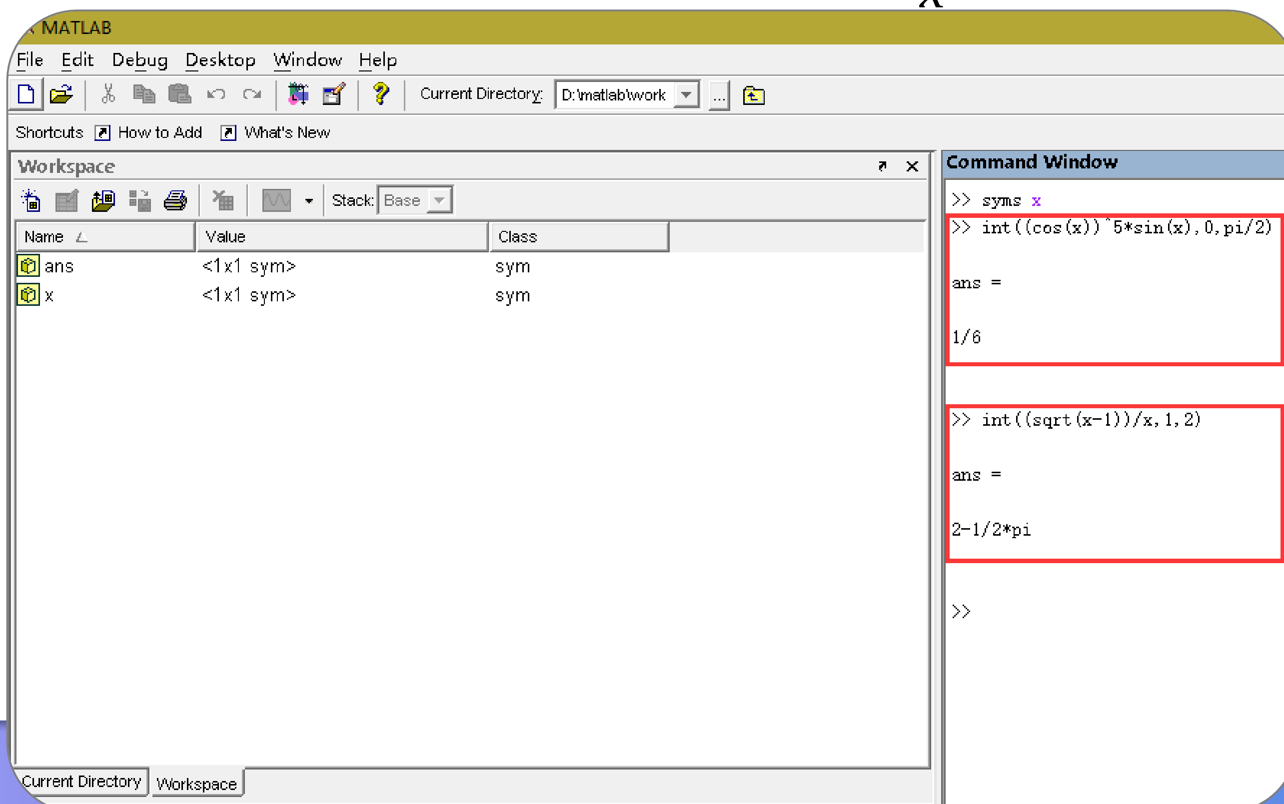
$$= \int_1^2 2(t^2 - 1) dt$$

换元法的本质

函数 $\Leftrightarrow$ 变量

课中任务1

计算定积分：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$ (2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$



课中任务解答

（1） 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$

解 令 $t = \cos x,\quad dt = -\sin x dx,$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,\qquad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

课中任务解答

（2）求 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

解　令$\sqrt{x-1}=t$，则 $dx=2tdt$，且当 $x=1$ 时，

$t=0$；当$x=2$ 时，$t=1$. 所以有

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt=2\int_0^1(1-\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2(1-\frac{\pi}{4})$$

思考题

(1) 应用换元积分法计算定积分需注意什么？

(2) 如何将不定积分的分部积分法运用到定积分的计算中？

(3) 如何理解定积分的分部积分法？

5 课堂小结

Class summaryTraining

课堂小结

1.第一类换元积分法 (函数→变量)

2.第二类换元积分法 (函数←变量)

3.典型问题

（1）公式应用；

（2）数学建模软件使用．

主观题 10分

设置

思考题

(1)积分上限函数是否可以看作是原函数？

(2)如果用原函数的方法来计算定积分，最重要因素是什么？

(3)牛顿-莱布尼茨公式与积分上限函数有什么关系？

作答

同学们！下课啦！
谢谢欣赏！

Accounting and Finance Knowledge Training