定积分的分部积分法

本节概要

SUMMARY

由牛顿—莱布尼兹公式，定积分计算转化为不定积分计算。在不定积分可积及相应定积分存在的条件下，不定积分运算法则大都可直接转化为相应的定积分运算法则。

由于不定积分计算重在确定原函数形式，而定积分计算目的是求值，故在计算时，二者仍有一些差别。

本节课主要学习定积分的分部积分法及其应用。

思考

如何理解分部积分法的基本原理？

与不定积分的分部积分法有何区别？

分部积分法和凑微分法运算相结合可将不易积出的积分转化为另一种较容易计算的积分进行计算。

定积分分部积分法是基于不定积分的分部积分法及牛顿－莱布尼茨公式而建立的一种定积分运算法则。

定积分的分部积分法

思考　乘积函数的积分如何求解？

$$\int_0^1 xe^x dx$$

不定积分的分部积分法是否适用？

依然适用

定积分的分部积分法

(1) 公式导出

由乘积求导法则

两边在 $[a,b]$ 上求定积分

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \int_a^b u'(x)v\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$[u(x)v(x)]\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

定积分的分部积分法

(1) 公式导出

定积分的分部积分公式

难

易

例如：

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

难

易

$$\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

例1 求积分 $\int_0^{\pi} x \qquad dx.$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

解：$\cancel{u = \cos x}$, $dv = \qquad d(\frac{1}{2}x^2)$, $v = \frac{1}{2}x^2$

***u*的选择不合适**

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$$

更难了

例1　求积分 $\int_0^{\pi} \boxed{x} \boxed{\cos x dx.}$

$$\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

解：$\boxed{u =} x$, $dv = \qquad d(\sin x)$, $\boxed{v = \sin x}$

选择合适的u

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \boxed{\int_0^{\pi} \sin x dx}$$

易

$$= 0 - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2$$

定积分的分部积分法

(2) 分部积分法中u的选择

由上例可以看出，分部积分法中u的选择至关重要，直接关系到能否计算出定积分

口诀：“反对幂三指”

反三角函数
对数函数

幂函数

指数函数
三角函数

优先级别逐级递减

例如

$$\int_0^{\pi} \boxed{x^2} \sin x dx \qquad \int_0^{\pi} x^2 \boxed{\ln x} dx$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \boxed{\arcsin x} dx \qquad \int_0^{\pi} \boxed{e^x} \boxed{\sin x} dx$$

课中任务1

计算积分：　(1) 计算 $\int_1^e x\ln x dx.$

(2) 计算 $\int_0^\pi x\sin x dx.$

课中任务解答

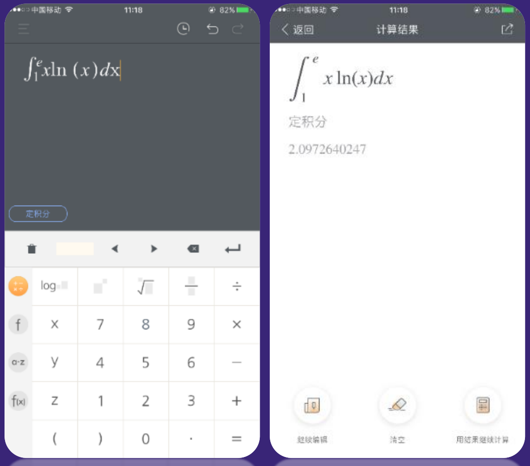
（1） 计算 $\int_1^e x\boxed{\ln x}dx.$

解： 令 $\boxed{u=\ln x,}$ $dv = xdx = d(\frac{1}{2}x^2),$ $\boxed{v=\frac{1}{2}x^2}$

$$\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$\int_1^e x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{1}{4}(e^2+1)$$



课中任务解答

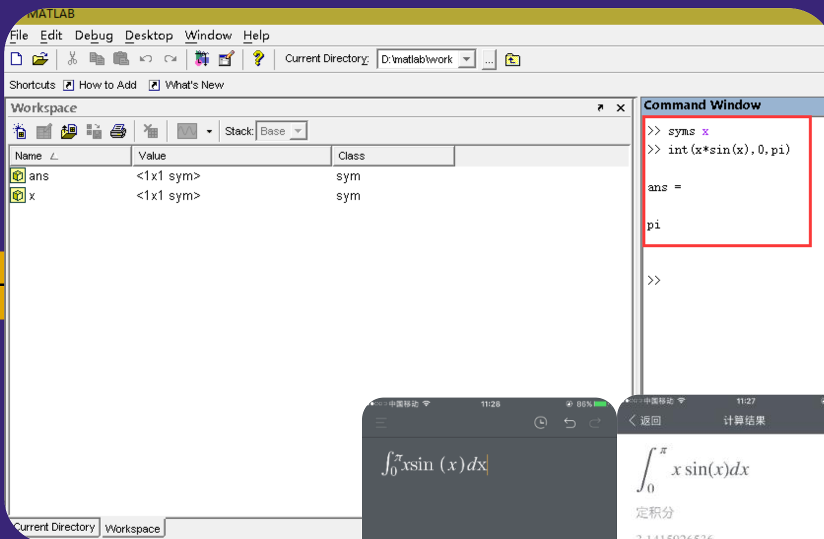
（2） 计算 $\int_0^{\pi} \boxed{x} \sin x dx.$

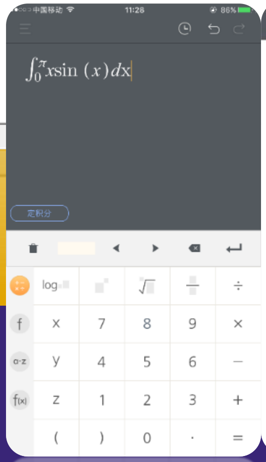
解： 令 $\boxed{u = x,}$ $dv = \sin x dx = d(-$

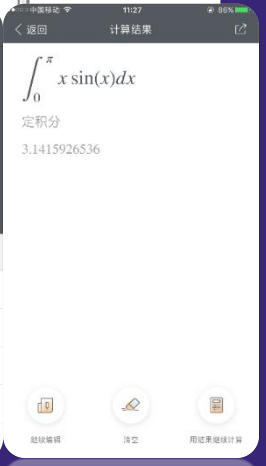
$$\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = x(-\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) d(x)$$

$$= \pi + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$







总结提炼

关于分部积分法的本质

定积分分部积分法与不定积分分部积分法相对应，是基于不定积分的分部积分法及牛顿 — 莱布尼茨公式而建立的一种定积分运算法则。

定积分分部积分法和凑微分法运算相结合可将不易积出的积分转化为另一种形式的积分进行计算。

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx} = \left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b - \boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

难　　　　易

总结提炼

u的选择口诀：“反对幂指三”

反函数 对数函数	幂函数	指数函数 三角函数

优先级别逐级递减

课中任务2

计算积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$

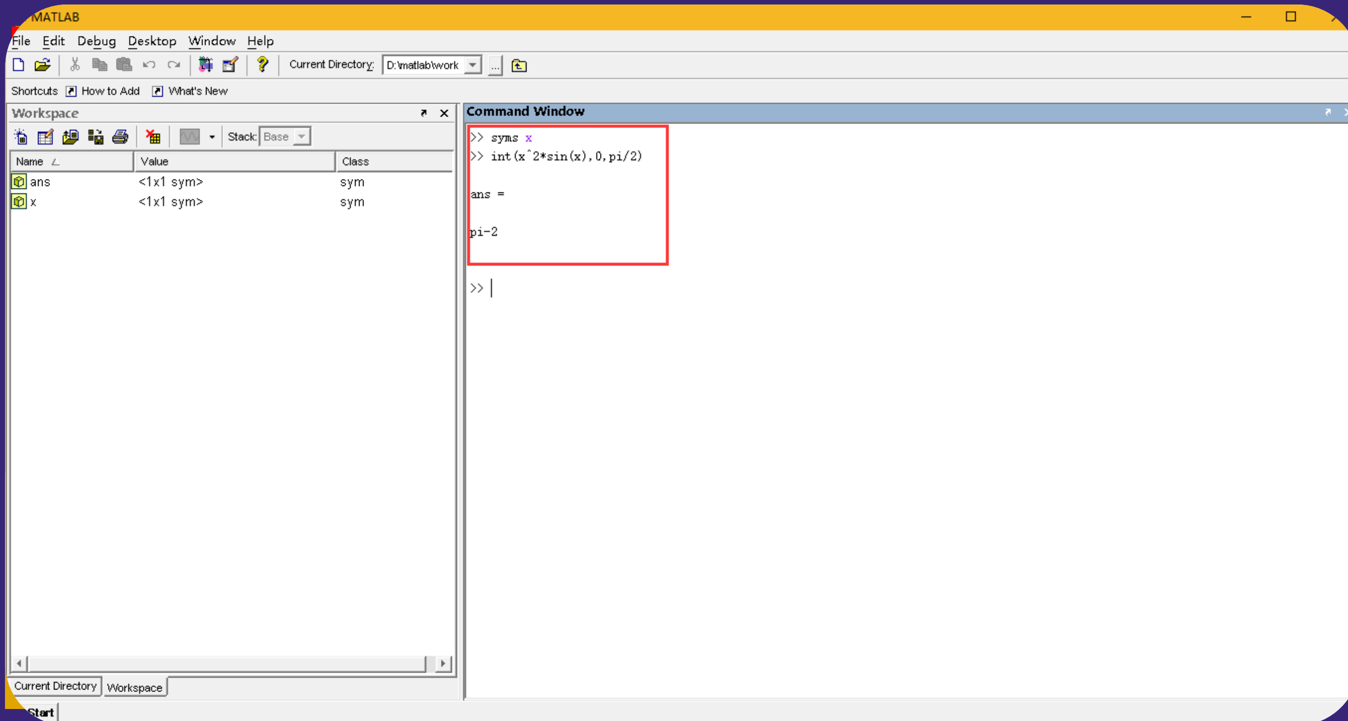
(2) $\int_0^1 \arctan x dx.$

课中任务解答

（1） 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{x^2}\sin x dx.$

$$\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

解： 令



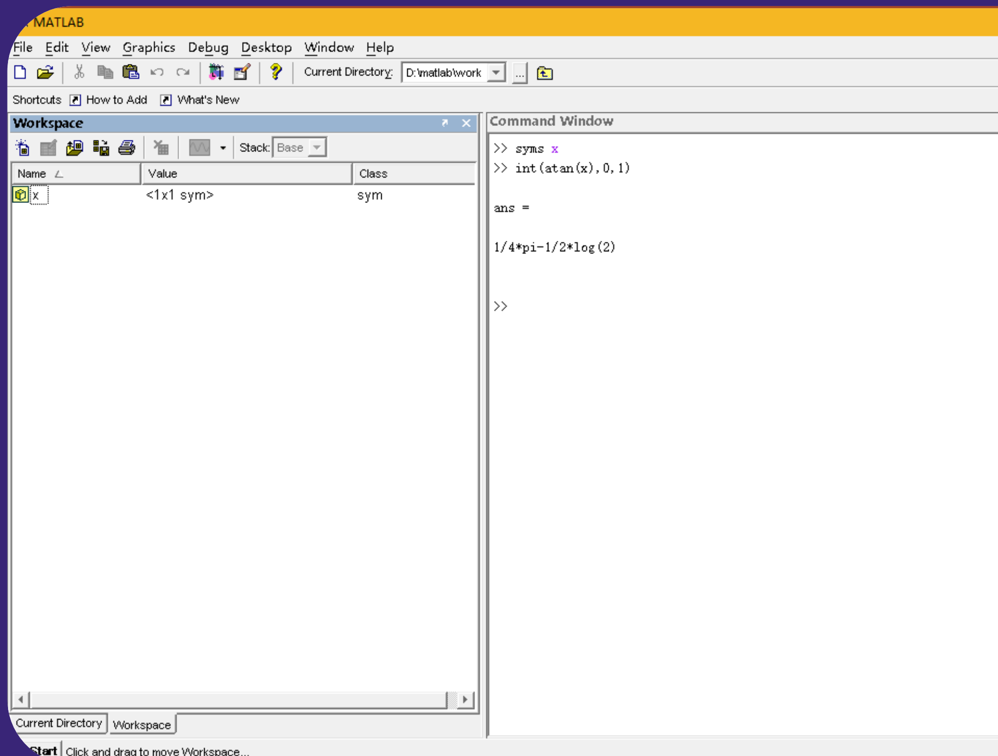
$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

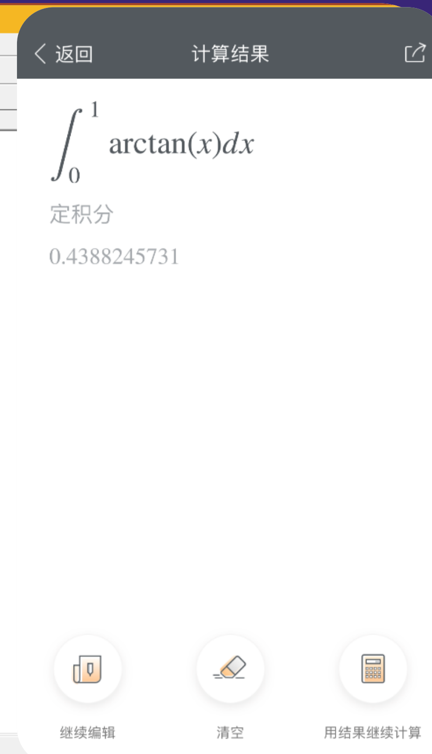
课中任务解答

（2） 计算 $\int_0^1 \boxed{\arctan x}\,dx.$

$$\int_a^b udv=[uv]\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

解：





$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

5

课堂小结

Class summaryTraining

课堂小结

1.分部积分法的原理

2.分部积分法的应用

3.典型用法与注意事项

（1）合理地选择u；

（2）化难为易的本质思想．

同学们！下课啦！谢谢欣赏！

Accounting and Finance Knowledge Training