旋转体的体积

- 定积分的应用

本节概要

SUMMARY

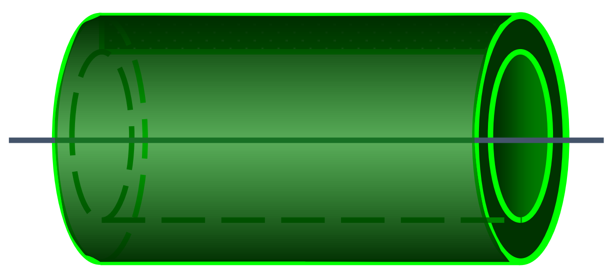
前面已经学习了元素法和平面图形的面积，立体体积计算一般是重积分问题，但由定积分也可求出一些特殊立体体积，这些特殊立体体积的计算方法是求一般立体体积的基础。

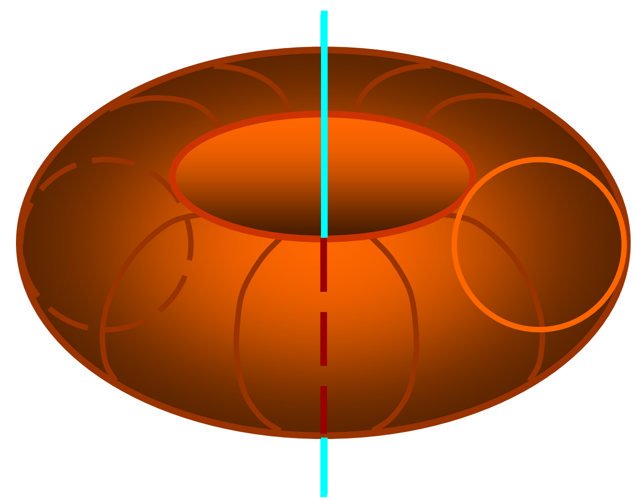
本节课主要讲解平面图形绕**X轴旋转**的旋转体体积，结合已学元素法，分析实际问题，能够构建旋转体体积模型求解其体积。

旋转体

·什么是旋转体·

由一个平面图形绕该平面内的一条直线旋转一周而成的立体称为旋转体，这条直线称为旋转轴。





专业技术型

生活型

关键问题

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

① 如何寻找旋转之前的平面图形的“曲边”？

② 如何构建旋转体的体积体积的定积分模型？

• 切片法

选择 x 作为积分变量，任取

$[\,x$ … 小区

间 … 轴旋

转 … 体积

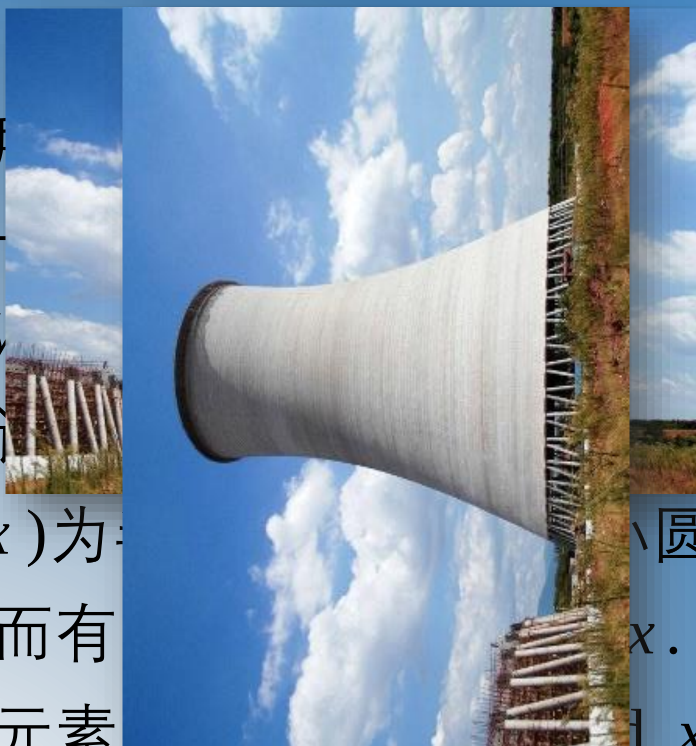
ΔV …

… 以

$f(x)$ 为 … 圆柱体，

因而有 … x. 取体

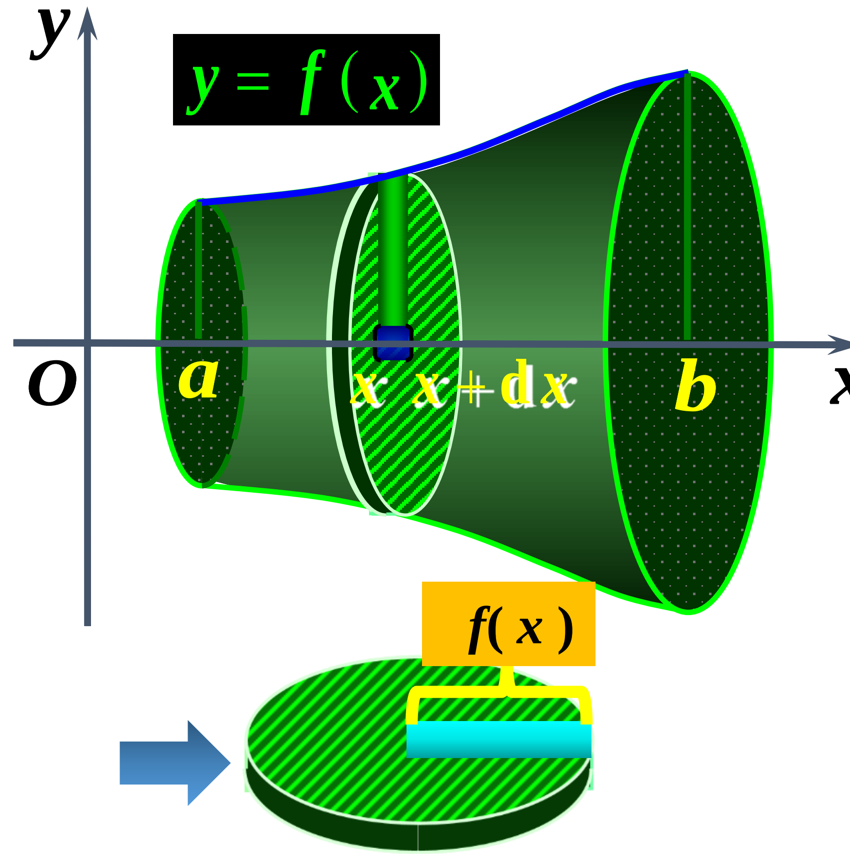
积元素 … $\mathrm{d}\,x$.



由此求得所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \boxed{\pi[f(x)]^2}\,dx$$

πr^2



$\Delta V_x \approx \pi[f(x)]^2\,dx$

• 切片法

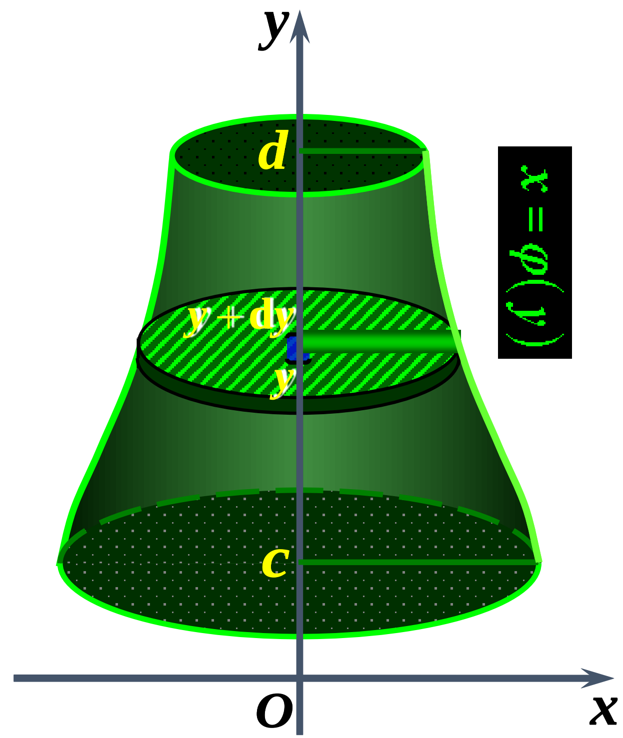
冷却塔可看作连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$，y 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成旋转体体积 V_y.

选 任取
$[y,y+$ 小区间
所对应 轴旋转一
周所成的小薄片旋转体体积 ΔV_y.

根据元素法，可得旋转体体积为

$$V=\int_c^d \boxed{\pi[\varphi(y)]^2}\,dy$$

$$\pi r^2$$



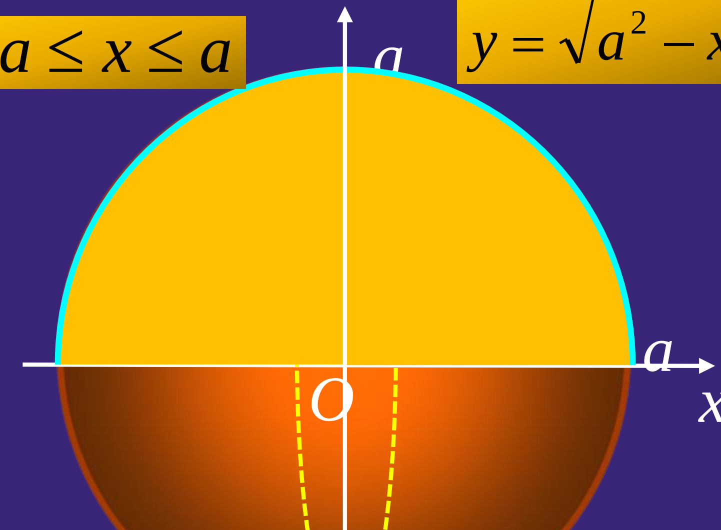
$\varphi(y)$

$$\triangle V_y=\pi[\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y$$

例1 求圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕x轴旋转一周所成的球的体积。

解 取 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2},$ x为积分变量, $-a\le x\le a$

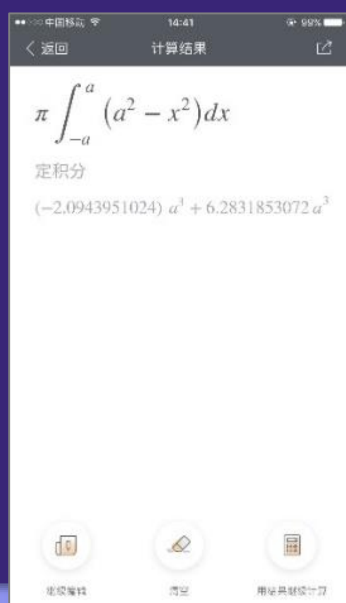
$y=\sqrt{a^2-x^2},$

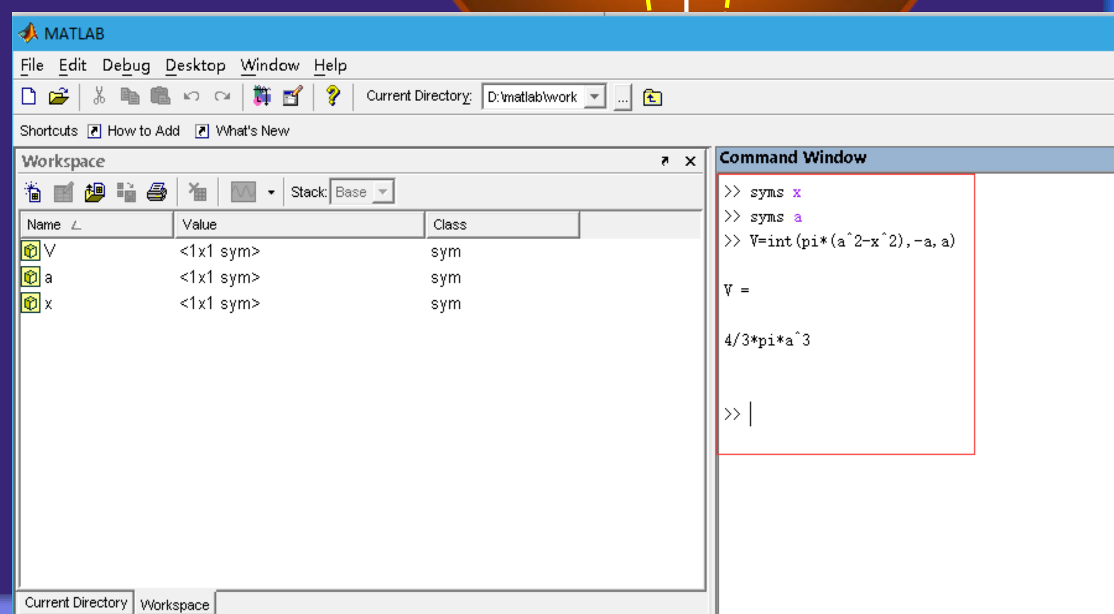


$$V=\int_a^b \pi\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$=\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3.$$





建立平面图形绕x轴旋转的体积模型，一般过程可总结为（   ）

- A 画出平面图形-确定积分区间-找“曲边”-建立体积模型
- B 画出体积图形-观察体积形状-找体积函数-建立模型
- C 以上都不对
- D 我还不太了解

结果说明

绕 x 轴旋转体体积的基本步骤：

（1）画出旋转前的平面图形，确定积分区间；

（2）找“曲边”；

（3）构建模型，利用建模工具计算定积分。

主观题 3分

设置

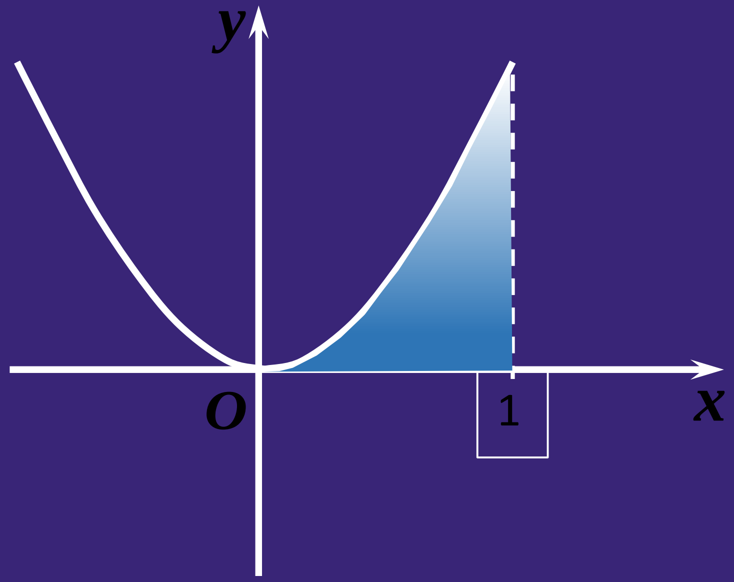
课中任务

试计算由曲线 $y = x^2, x \in [0, 1]$与 x 轴所围成的图形绕 x 轴, 旋转所得旋转体体积 V_x。

$$V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$V_x = \int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2 dx$$

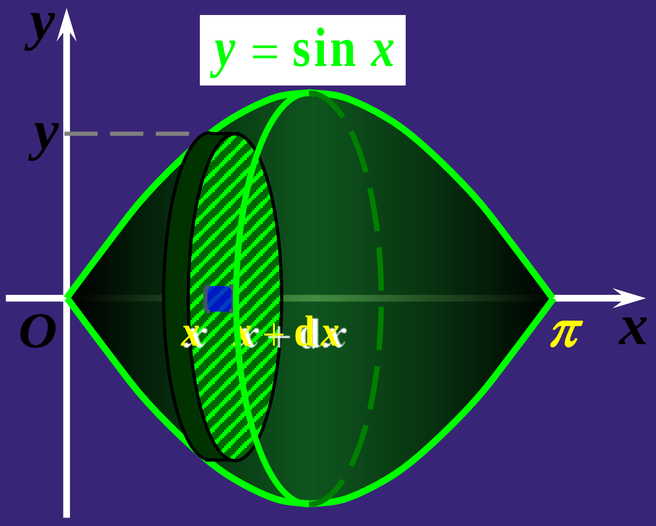
$$= \int_0^1 \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5}$$



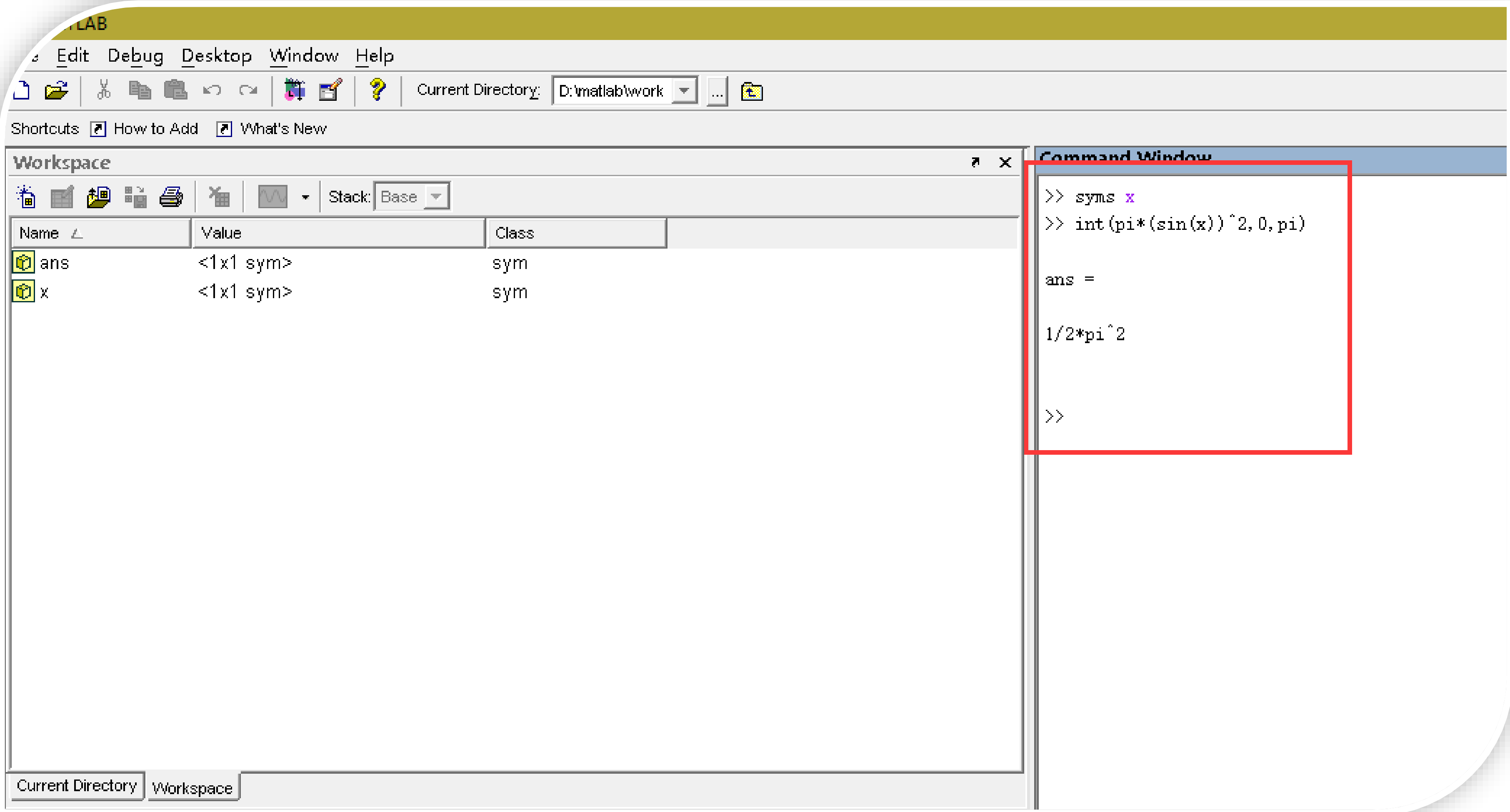
主观题 3分

课中任务

试计算由曲线 $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴, 旋转所得旋转体体积 V_x。



任务解答



$$V_x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}V_x = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi^2 .$$

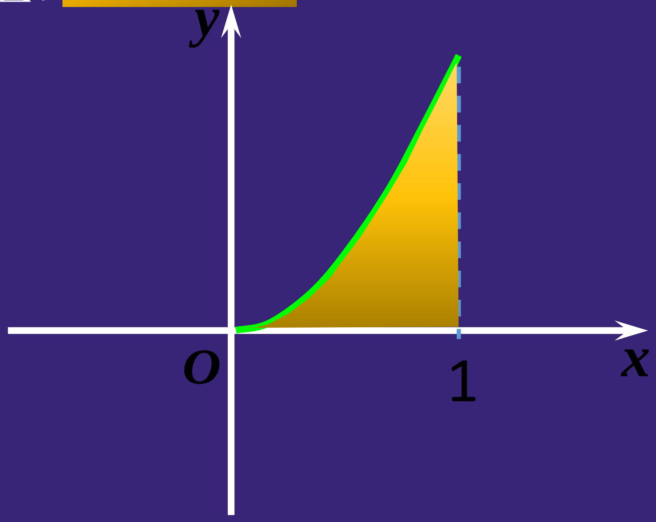
例2 求抛物线 $y=x^2$,直线$x=2$与x轴所围成的平面图形分别 绕x轴,y轴旋转一周所得立体的体积。

解 绕X轴旋转：取 $f(x)=x^2$, x为积分变量, $0 \le x \le 2$

$$V_x=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$V_x=\int_0^2 \pi\left(x^2\right)^2 dx=\int_0^2 \pi x^4 dx$$

$$=\frac{x^5}{5}\pi\Big|_0^2=\frac{32}{5}\pi.$$



那么，平面图形绕y轴旋转的体积又该如何求解呢？

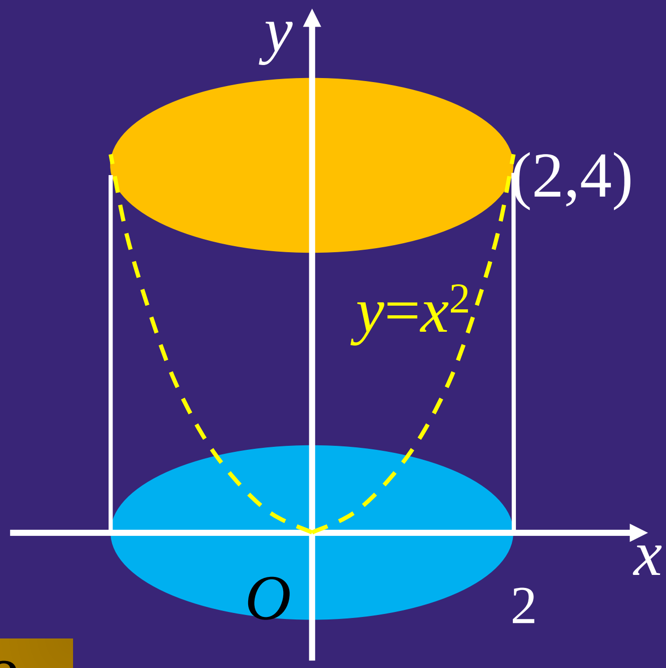
绕Y轴旋转: 抛物线 $x=\sqrt{y}$, 与绕Y轴旋转而成的旋转体体积为

$$V_y=\int_a^b \pi(\varphi(y))^2 dy$$

$$V_y=\int_0^4 \pi x^2 dy=\int_0^4 \pi y dy$$

$$=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi$$

$$Vy=\text{圆柱体体积}-V=16\pi-8\pi=8\pi$$



例3 求抛物线$y=x^2$，$y=4$所围成的平面图形绕y轴旋转一周所形成的旋转体体积。

解 $y=x^2,$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{y},$ 积分变量 $0\le y\le 4$

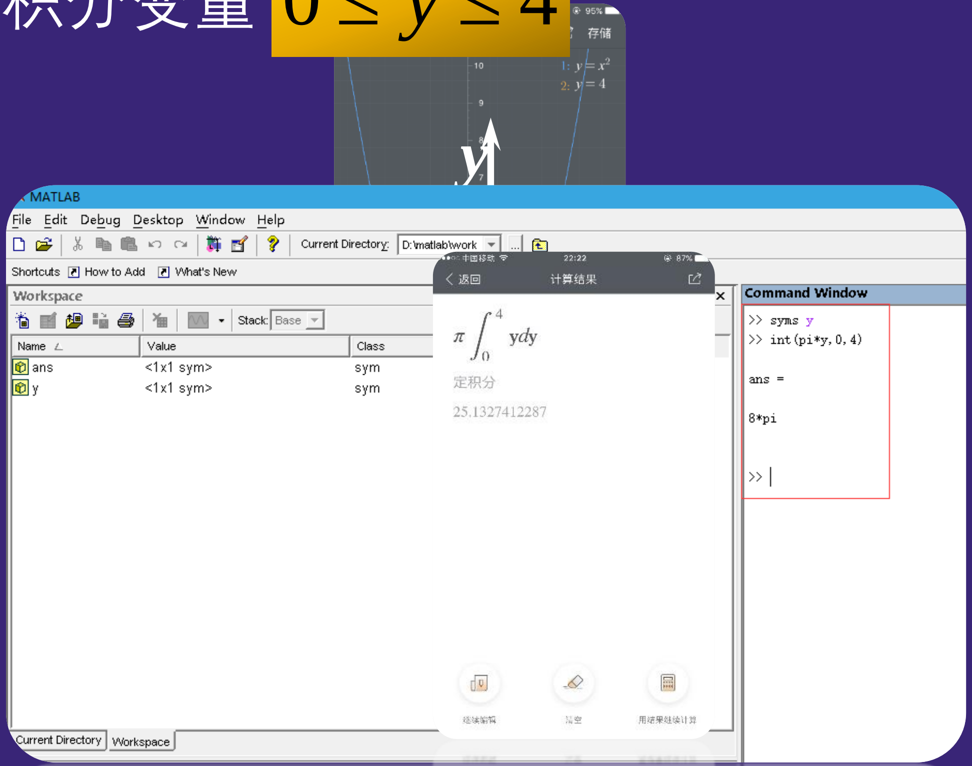
于是由体积模型：

$$V_y=\int_c^d \pi\varphi^2(y)dy$$

可得：

$$V_y=\pi\int_0^4 x^2dy=\pi\int_0^4 ydy$$

$$=8\pi$$

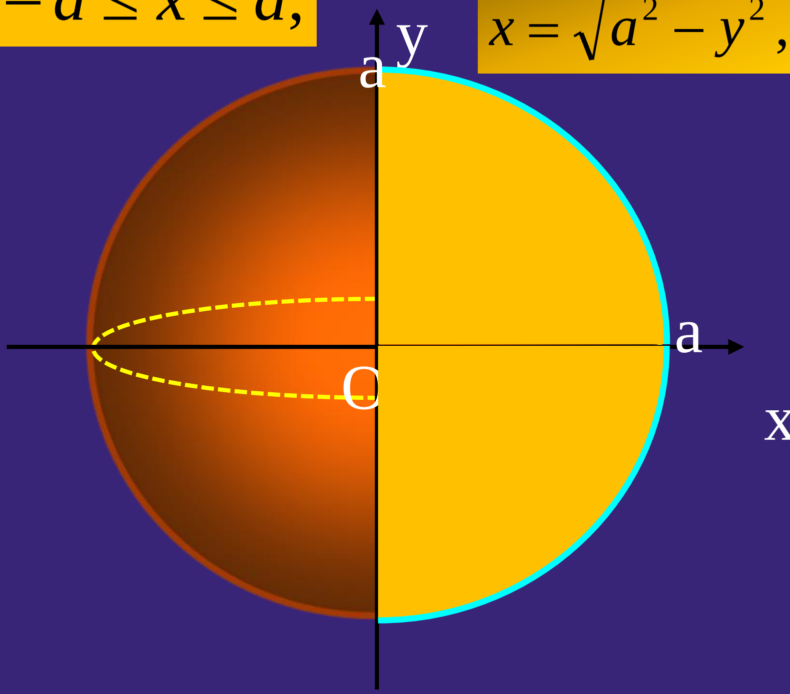


课中任务

例2 求圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕y轴旋转一周所成的球的体.

解 取 $x=\sqrt{a^2-y^2}$, y 为积分变量, $-a\le x\le a$,

$x=\sqrt{a^2-y^2}$,



$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^2dy$$ 于是

$$=\pi\left(a^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

所以，球的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

结果说明

绕 X，Y 坐标轴旋转体体积的基本步骤：

（1）画出旋转前的平面图形，选择合适的积分变量，确定积分区间；

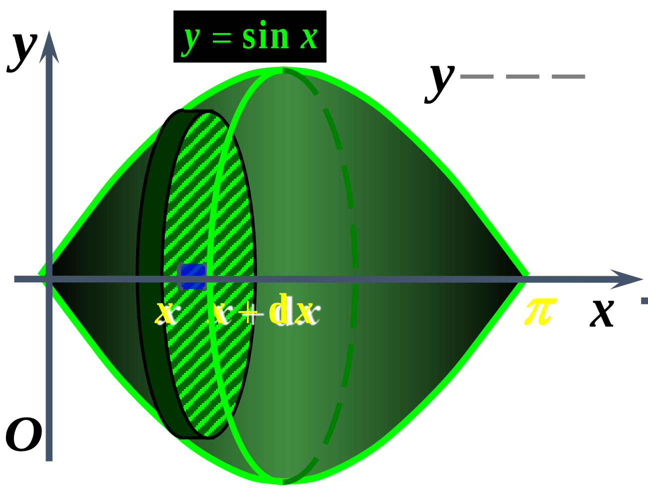
（2）找“曲边”；

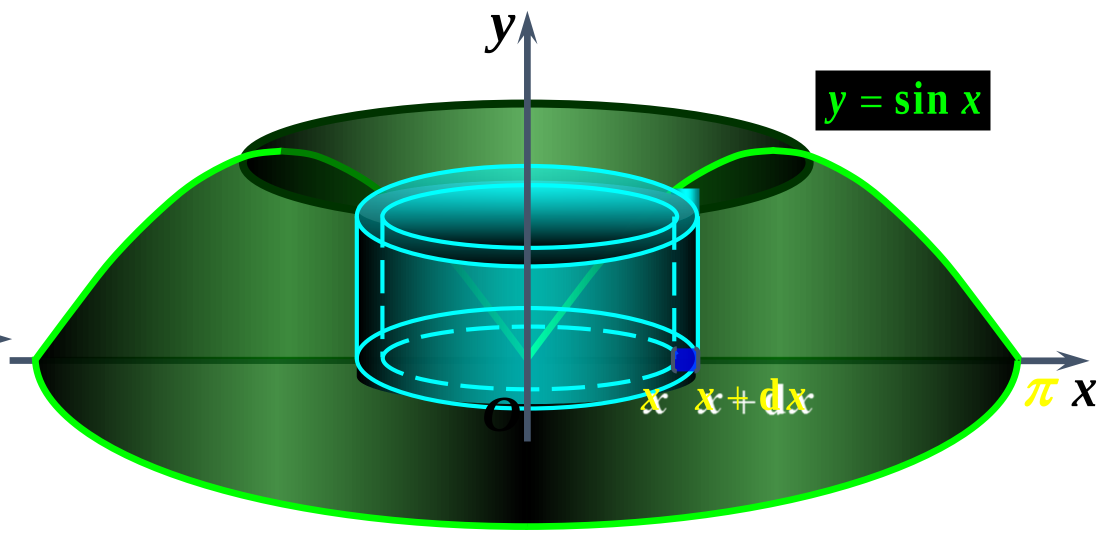
（3）构建模型，利用建模工具计算定积分。

主观题 3分

课中任务

试计算试计算由曲线 $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$与 x 轴所围成的图形绕 x 轴、 y轴旋转所得旋转体体积 V_x， V_y。





课中任务解答

练习： 试计算由曲线 $y=\sin x$，$x\in[0,\pi]$与 x 轴所围成的图形绕 x 轴、y轴旋转所得旋转体体积 V_x，V_y。

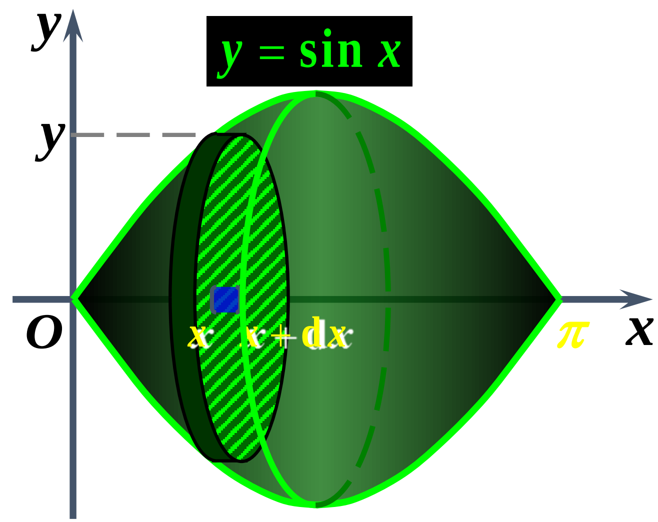
分析——旋转体体积可归结为定积分计算，确定定积分形式需确定相应的积分变量、被积表达式及积分限。这些因素的确定均依赖于给定图形的边界曲线方程及其几何性质。因此，为确定定积分形式，可先作出曲边梯形及相应旋转体图形辅助分析，再根据指定的旋转轴选择相应方法。

课中任务解答

解

绕 x 轴旋转的旋

- 作旋转体草图
- 用切片法计算



选择 x 作为积分变量，

任取 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0, \pi]$，

考虑该小区间所对应的小曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的小薄片旋转体体积 ΔV_x.

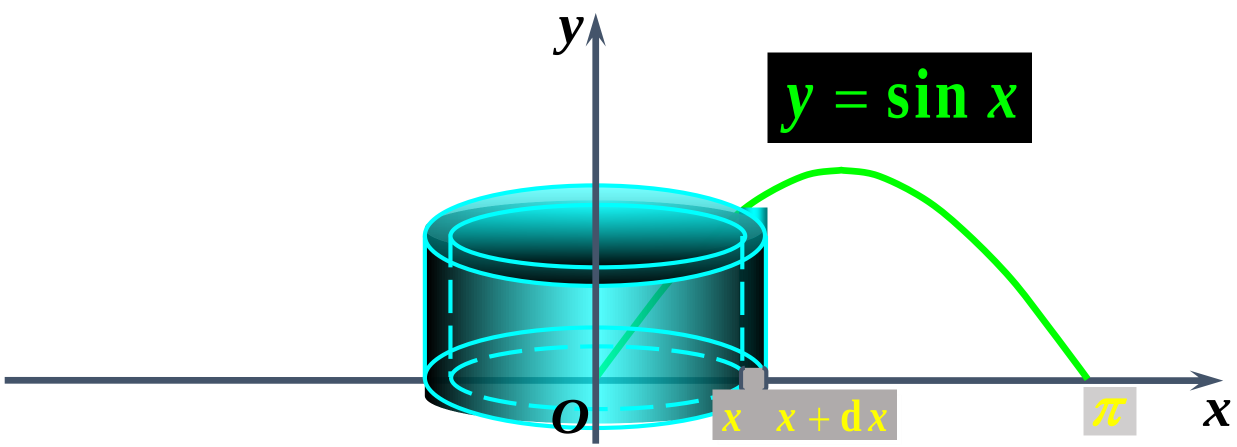
取体积元素为 $\mathrm{d}V_x = \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi \sin^2 x \mathrm{d}x$.

由此求得绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}V_x = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi^2.$$

绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_y：

选择 x 作为积分变量，任取 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0, \pi]$，考虑该小区间所对应的小曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的环形薄壳旋转体体积 ΔV_y.



课中任务解答

- 计算体积元及定积分

取体积元素为

$$\mathrm{d}V_y = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x = 2\pi x\sin x\,\mathrm{d}x,\quad x\in[0,\pi].$$

由此求得绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -2\pi\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= -2\pi[x\cos x]_0^{\pi} + 2\pi\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$$

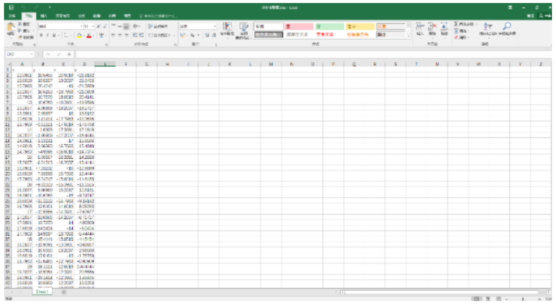
$$= 2\pi^2 + 2\pi[\sin x]_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

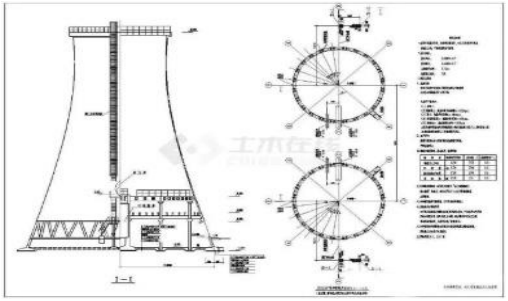
4 建模

Mathematical Modeling

4 建模

1.课前【任务3】分析

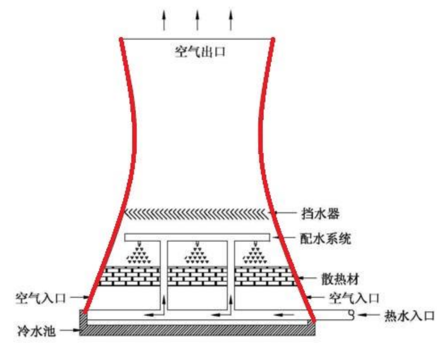




4 建模

2.边界曲线的确定-spss数据拟合

如何确定边界曲线？



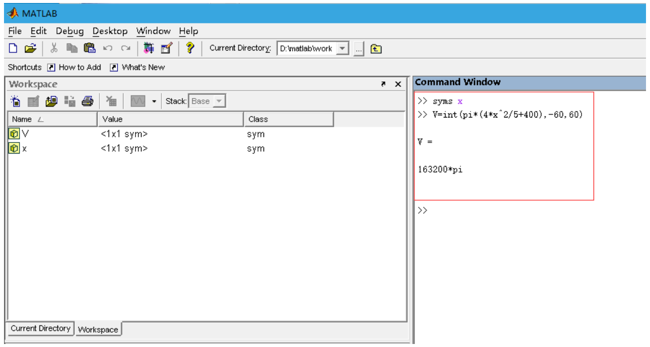
双曲线冷却塔结构示意图

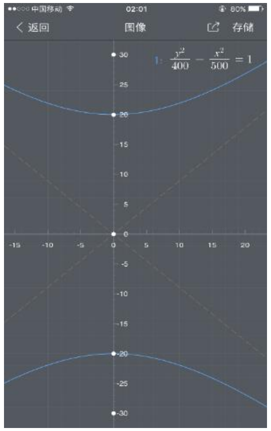
4 建模

2.小组模型比拼

$$V=\pi\int_{-60}^{60}(\frac{4x^2}{5}+400)dx$$

$$\approx 163200\pi(m^3)$$





5

课堂小结

Class summaryTraining

5 课堂小结

- 用定积分表示平面图形绕X轴旋转的体积模型 $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$
- 确定现实体积模型中的被积函数表达式（Spss软件回归拟合）
- 求解定积分（手机APP“超级计算器”、matlab数学工具）

思考以下三个问题：

思考如果利用Y作为积分变量，如何构建坐标系？

(2)如何计算平面图形绕Y-轴旋转一周的体积？

(3)结合所给数据，以课前【任务3】中体积求解为目标，如果用Y作为积分变量，如何求解？

5 课堂小结

专业技术型



5 课堂小结

生活型