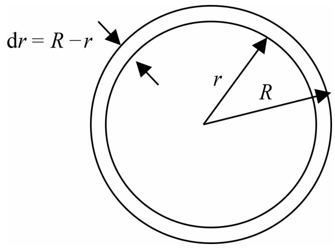

图 2-9

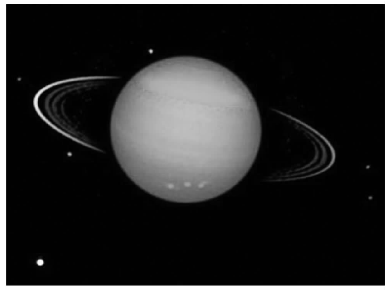

图 2-10

解　(1)圆的面积公式为 $A=\pi r^2$，所以

$$\pi R^2-\pi r^2=\Delta A\approx \mathrm{d}A=f'(r)\mathrm{d}r=2\pi r(R-r).$$

(2)由(1)的计算，$r=62\ 900$ km，$R-r=50$ km，
所以海王星最外层那个环的面积约为

$$\Delta A\approx \mathrm{d}A=2\pi r(R-r)=2\pi\cdot 62\ 900\cdot 50=19\ 769\ 618(\mathrm{km}^2).$$

这个面积大约为整个地球面积的 4%.

复习题 2(历年专升本考试真题)

一、单项选择题

1.(2009/3)下列函数中，在点 $x=0$ 处连续但不可导的是(　　).

A. $y=|x|$　　B. $y=1$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{x-1}$

2.(2008/3)函数在点 x_0 处连续是在该点处可导的(　　).

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

3.(2006/1)函数 $\mathrm{d}u=$在$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$处(　　).

A. 无定义　　B. 不连续　　C. 可导　　D. 连续但不可导

4.(2005/3)设 $f(x)=\cos x$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$(　　).

A. $-\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin a$　　D. $\sin x$

5.(2002/12)由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$在 $x=0$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$是(　　).

A. e　　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C. $-\mathrm{e}$　　D. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

二、填空题

1.(2015/7)设函数 $y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\tan t\\ y=t^3+2t\end{cases}$所确定，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=$________.

2.(2015/10)设函数 $f(x)=\log_2 x(x>0)$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$________.

3.(2013/7)曲线$\begin{cases}x=3^t\\y=\tan t\end{cases}$在$t=0$相应点处的切线方程是$y=$________.

4.(2013/8)曲线$f(x)=\begin{cases}x(1+x)^{\frac{1}{x}},x<0\\0,x\geqslant 0\end{cases}$在$x=0$处的左导数$f'_-(0)$________.

5.(2012/6)设函数$f(x)$在$x=x_0$处可导,且$f'(x_0)=3$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________.

6.(2011/7)圆$\begin{cases}x=t-t^3\\y=2^t\end{cases}$,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=$________.

7.(2010/7)圆$x^2+y^2=x+y$在点(0,0)处的切线方程是________.

8.(2009/8)若曲线$\begin{cases}x=kt-3t^2\\y=(1+2t)^2\end{cases}$在$t=0$处的切线斜率为1,则常数$k=$________.

9.(2008/7)曲线$y=x\ln x$在点(1,0)处的切线方程是________.

10.(2006/7)由参数方程$\begin{cases}x=\sin t+1\\y=\mathrm{e}^{-1}\end{cases}$所确定的曲线在$t=0$相应点处的切线方程是________.

三、计算题

1.(2015/13)设$y=\ln\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$,求$y''|_{x=0}$.

2.(2014/12)设$y=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$,求$y''|_{x=0}$.

3.(2014/19)已知函数$f(x)=\begin{cases}(1+3x^2)x^{\frac{1}{2}}\sin 3x+1,x\neq 0\\a,x=0\end{cases}$在$x=0$处连续.

(1)求常数a的值;

(2)求曲线$y=f(x)$在点$(0,a)$处的切线方程.

4.(2013/12)已知函数$f(x)$具有连续的一阶导数,且$f(0)f'(0)\neq 0$,求常数a,b的值,使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0$.

5.(2013/13)求由方程$xy\ln y+y=\mathrm{e}^{2x}$所确定的隐函数在$x=0$处的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$.

6.(2012/12)设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\ln(\sqrt{3+t^2}+t)\\y=\sqrt{3+t^2}\end{cases}$所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7.(2011/12).已知函数$f(x)$的$n-1$阶导数$f^{(n-1)}(x)=\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}-\mathrm{e}^{-x})$,求$f^{(n)}(0)$.

8.(2010/12)设函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{2}{x}+\sin 2x,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$,用导数定义计算$f'(0)$.

9.(2009/12)设$f(x)=\begin{cases}x(1+2x^2)\dfrac{1}{x^2},x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$,用导数定义计算$f'(0)$.

10.(2009/13)已知函数 $f(x)$的导数 $f'(x)=x\ln(1+x^2)$,求 $f'''(1)$.

11.(2008/13)设参数方程$\begin{cases}x=e^{2t}\\y=t-e^{-t}\end{cases}$确定函数 $y=y(x)$,计算$\dfrac{dy}{dx}$.

12.(2007/12)设 $y=\cos^2 x+\ln\sqrt{1+x^2}$,求二阶导数 y''.

13.(2007/13)设函数 $y=y(x)$由方程 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$ 确定,求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

14.(2006/13)设函数 $y=\sin^2\dfrac{1}{x}-2^x$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

15.(2006/14)函数 $y=y(x)$是由方程 $e^y=\sqrt{x^2+y^2}$所确定的隐函数,求$\dfrac{dy}{dx}$在点(1,0)处的值.

延伸阅读:微积分的起源

微积分是微分学和积分学的统称,它的萌芽、产生与发展经历了漫长的时期.早在古希腊时期,欧多克斯就提出了穷竭法,这是微积分的先驱,而我国庄子的《天下篇》中也有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的极限思想.263 年,刘徽为《九章算术》作注时提出了“割圆术”,是极限论思想的成功运用.

十六、十七世纪,科学技术和生产力迅猛发展,哥伦布发现新大陆,哥白尼创立日心说,伽利略出版《力学对话》,开普勒发现行星运动规律,航海的发展、矿山的开发、天体的观测等促使人们提出了一系列力学和数学的问题,微积分在这样的条件下诞生是必然的.

微分方法的先驱工作起源于 1629 年费尔玛陈述的概念,他提出了如何确定极大值和极小值的方法.其后剑桥大学巴罗教授又提出了求切线的方法,进一步推动了微分学概念的产生.前人的工作终于使牛顿和莱布尼茨在 17 世纪下半叶各自独立创立了微积分.1665 年 5 月 20 日,在牛顿手写的一篇文章中开始有“流数术”的记载,微积分的诞生便以这一天为标志.牛顿在 1665 年至 1676 年的许多著作中,完整地提出了“微积分是一对互逆运算”的说法,并且给出换算的公式,就是后来著名的牛顿—莱布尼茨公式.

如果说牛顿是从力学研究中提出了“流数术”,那么莱布尼茨则是从几何学上考察切线问题得出了微分法.从始创微积分的时间上讲,牛顿比莱布尼茨大约早 10 年,但从正式公开发表的时间来说,牛顿要比莱布尼茨晚.因此,后人将他们两人并列为微积分的创始人.