16.(2003/1)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^{x}t^3\mathrm{d}t}$.

17.(2002/19)计算定积分 $\int_1^4\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

18.(2001/4)计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

四、综合题

1.(2015/15)求由曲线 $y=x\cos 2x$ 和直线 $x=0$,$x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积.

2.(2014/15)已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$,求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$,$x=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面图绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x.

3.(2014/20)已知函数 $f(x)=\int_{\ln x}^{2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$. 求:(1)$f'(\mathrm{e}^2)$;(2)计算定积分 $\int_1^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x$.

4.(2011/19)过坐标原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线 l,切线 l 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 及 y 轴围成的平面图形标记为 G. 求:(1)切线 l 的方程;(2)G 的面积;(3)G 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

5.(2010/19)求函数 $\Phi(x)=\int_0^x t(t-1)\mathrm{d}t$ 的单调增减区间和极值.

6.(2010/20)已知 $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数.(1)求 $f(x)$;(2)计算 $\int_1^{+\infty}f(2x)\mathrm{d}x$.

7.(2009/19)用 G 表示由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x+y=1$,$y=1$ 围成的平面图形.(1)求 G 的面积;(2)求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

8.(2008/20)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,且 $0<f(x)<1$,判断方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在区间 $(0,1)$ 内有几个实根,并证明你的结论.

9.(2005/23)已知 $f(\pi)=2$,且 $\int_0^x[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$,求 $f(0)$.

延伸阅读:定积分的起源

积分思想源远流长.我国魏晋时期的数学家刘徽利用“割圆术”开创了圆周率研究的新纪元.刘徽首先考虑圆内接正六边形面积,接着是正十二边形面积,然后依次加倍边数,则正多边形面积越来越接近圆面积.按此思想,他从圆的内接正六边形面积一直算到内接正 192 边形面积,得到圆周率的近似值 3.14.大约两个世纪之后,南北朝时期的著名数学家祖冲之(429—500)、祖恒父子推进和发展了刘徽的数学思想.首先,算

出了圆周率介于 3.1415926 与 3.1415927 之间；其次，明确提出了“祖氏原理”(即西方所谓的“卡瓦列利原理”)：“幂势既同，则积不容异”；最后，应用该原理成功地解决了刘徽未能解决的球体积问题.

古希腊时期也有此类思想，并用类似的方法解决了许多实际问题. 较为重要的当数安提芬(Antiphon)的“穷竭法”. 他在研究化圆为方问题时，提出用圆内接正多边形的面积穷竭圆面积，从而求出圆面积. 后来，欧多克斯(Eudoxus，前 409—前 356)补充和完善了穷竭法. 公元前 3 世纪数学家、物理学家阿基米德(Archimedes，前 287—前 212)在《抛物线图形求积法》和《论螺线》中，利用穷竭法，借助于几何直观，求出了抛物线弓形的面积及阿基米德螺线第一周围成的区域的面积. 他的方法通常被称为“平衡法”，实质上是一种原始的积分法. 他将需要求积的量分成许多微小单元，再利用另一组容易计算总和的微小单元来进行比较. 平衡法体现了近代积分法的基本思想，可以说是定积分概念的雏形. 到了 17 世纪，随着积分符号的引入，积分学逐步形成了自己独立的理论并得到了迅速发展.