



项目 2 家庭照明电路设计与安装

项目	子项目	相应知识目标	相应能力目标
项目 2： 家庭照明电路设计与安装	子项目 1： 简单照明电路设计与安装	掌握照明电路的安装方法和注意事项	能正确安装简单家庭照明电路
	子项目 2： 万用表、电度表的使用	掌握万用表、电度表的使用方法和注意事项	能正确使用万用表和电度表



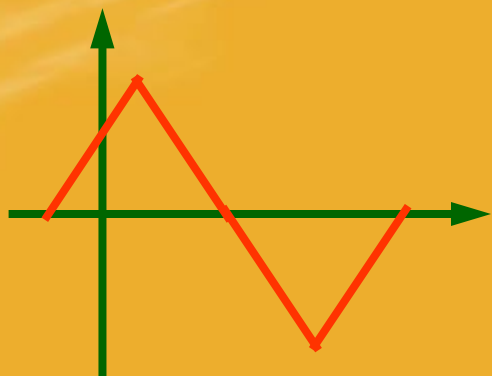


- 2. 1 认识正弦交流电路
- 2. 2 交流电路中的电源
- 2. 3 交流电路中的负载
- 2. 4 单项正弦交流电路
- 2. 5 三相正弦交流电路

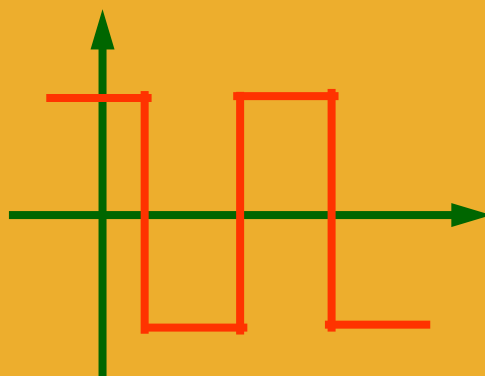


2.1 认识正弦交流电

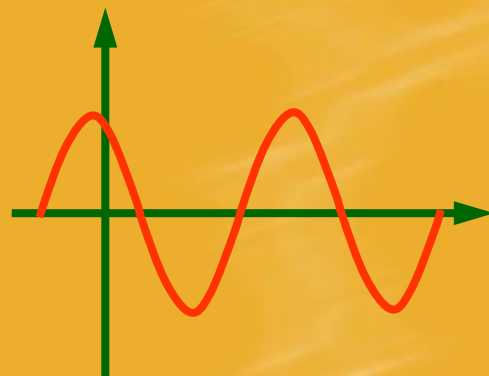
交流电：电流或电压的大小和方向随时间变化。如



等腰三角波



矩形脉冲波

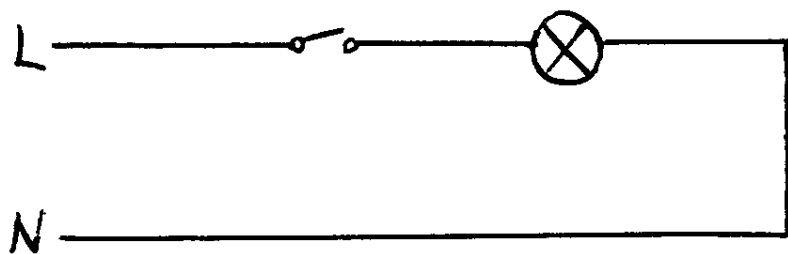


正弦波

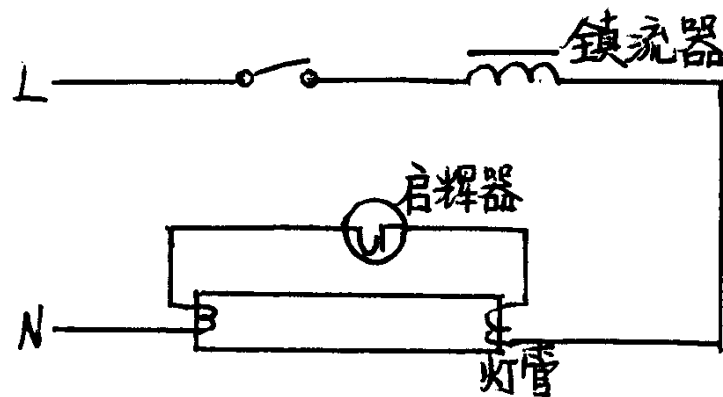
正弦交流电：电流或电压的大小和方向均随时间按正弦规律变化。

正弦交流电广泛应用于工农业生产、科学研究及日常生活中，因此要掌握它的特点，学会正弦交流电路的基本分析方法，这也是本章学习的目的。

实例引入



白炽灯电路



日光灯电路

2.2 交流电路的电源

交流电源：单相交流电源（照明电路）
三相交流电源（工矿企业电机电路）

一、单相电源

1. 单相电源插座接线图（31页图2-2，左零右相中保护）
2. 正弦交流电的三要素

随时间按正弦规律变化的电压、电流称为正弦电压和正弦电流。表达式为：

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

以正弦电流为例：

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

振幅

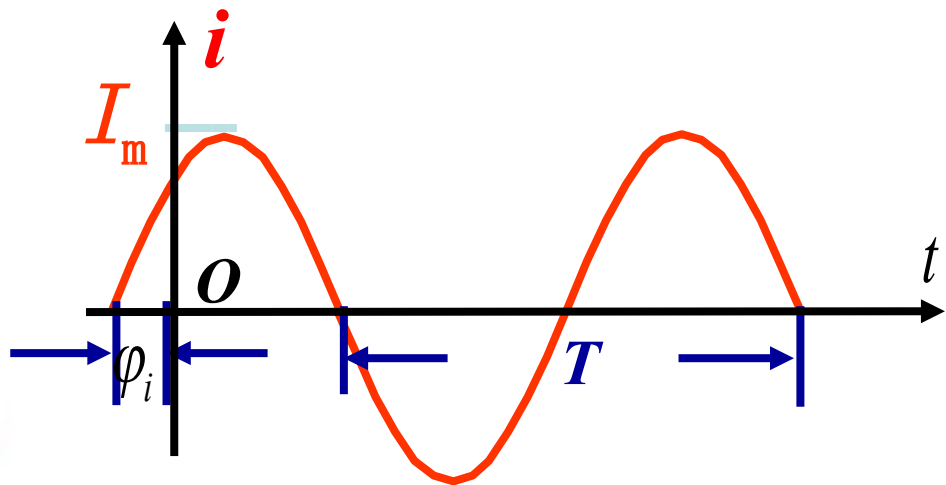
角频率

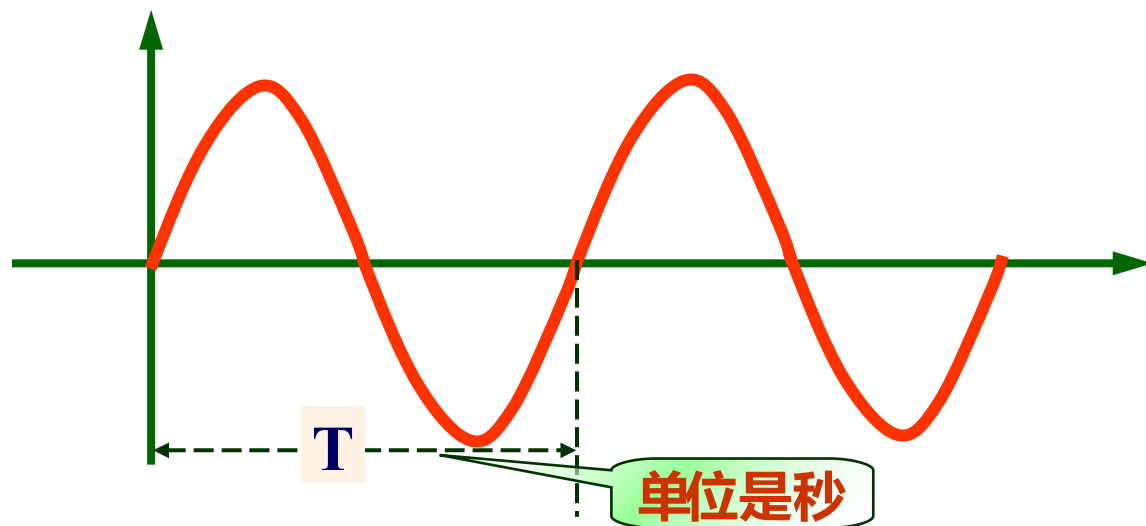
相位

初相角（初相）

振幅、角频率和初相称为正弦量的三要素。

波形：





正弦量变化一个循环所需要的时间称**周期**，用 **T** 表示。

正弦量一秒钟内经历的循环数称为**频率**，用 **f** 表示。

正弦量一秒钟内经历的弧度数称为**角频率**，用 ω 表示。

显然：

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

工频：中国 50Hz，美国、日本 60Hz。（我们采用欧洲标准）



(1) 瞬时值

指各个时刻的数值，用正弦解析式表示，即：

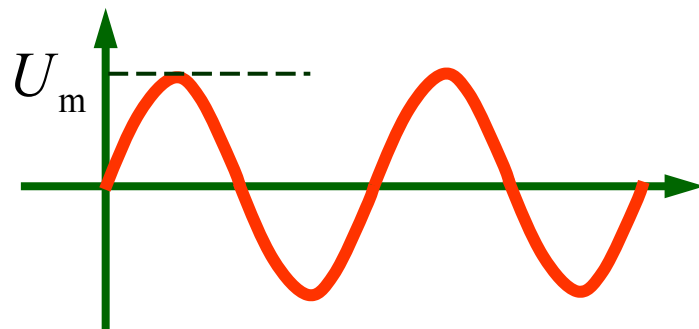
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

瞬时值是变量，注意要用小写英文字母表示。

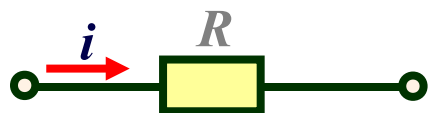
(2) 最大值

正弦量振荡的最高点称为最大值，用 U_m (或 I_m) 表示。

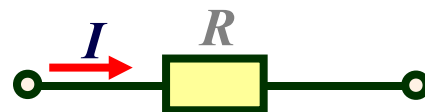


(3) 有效值

有效值是指与正弦量热效应相同的直流电数值。



交流电流 i 通过电阻 R 时，
在 t 时间内产生的热量为 Q ；



直流电流 I 通过相同电阻 R 时，
在 t 时间内产生的热量也为 Q 。

两电流热效应相同，可理解为二者做功能力相等。
我们把做功能力相等的直流电的数值 I 定义为相应交流电 i 的有效值。（**没特别说明时指有效值**）

理论和实践都可以证明，**正弦交流电的有效值和最大值之间具有特定的数量关系，即：**

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m, \quad I_m = \sqrt{2}I = 1.414I$$

注意:

1、交流电压、电流表测量数据为有效值，平时所讲电流、电压均为有效值。如照明电路电压 220V。

2、交流设备名牌标注的电压、电流均为有效值。

例:

220V 电压有效值对应最大值为 311V，380V 有效值电压对应最大值为 537V。



例题 2-1 :

正弦电压的最大值 $U_m = 311V$, 初相 $\psi_u = 30^\circ$;

正弦电流的最大值 $I_m = 14.1A$, 初相 $\psi_i = -60^\circ$ 。

它们的频率均为 $50Hz$ 。

试分别写出电压和电流的瞬时值表达式 , 并

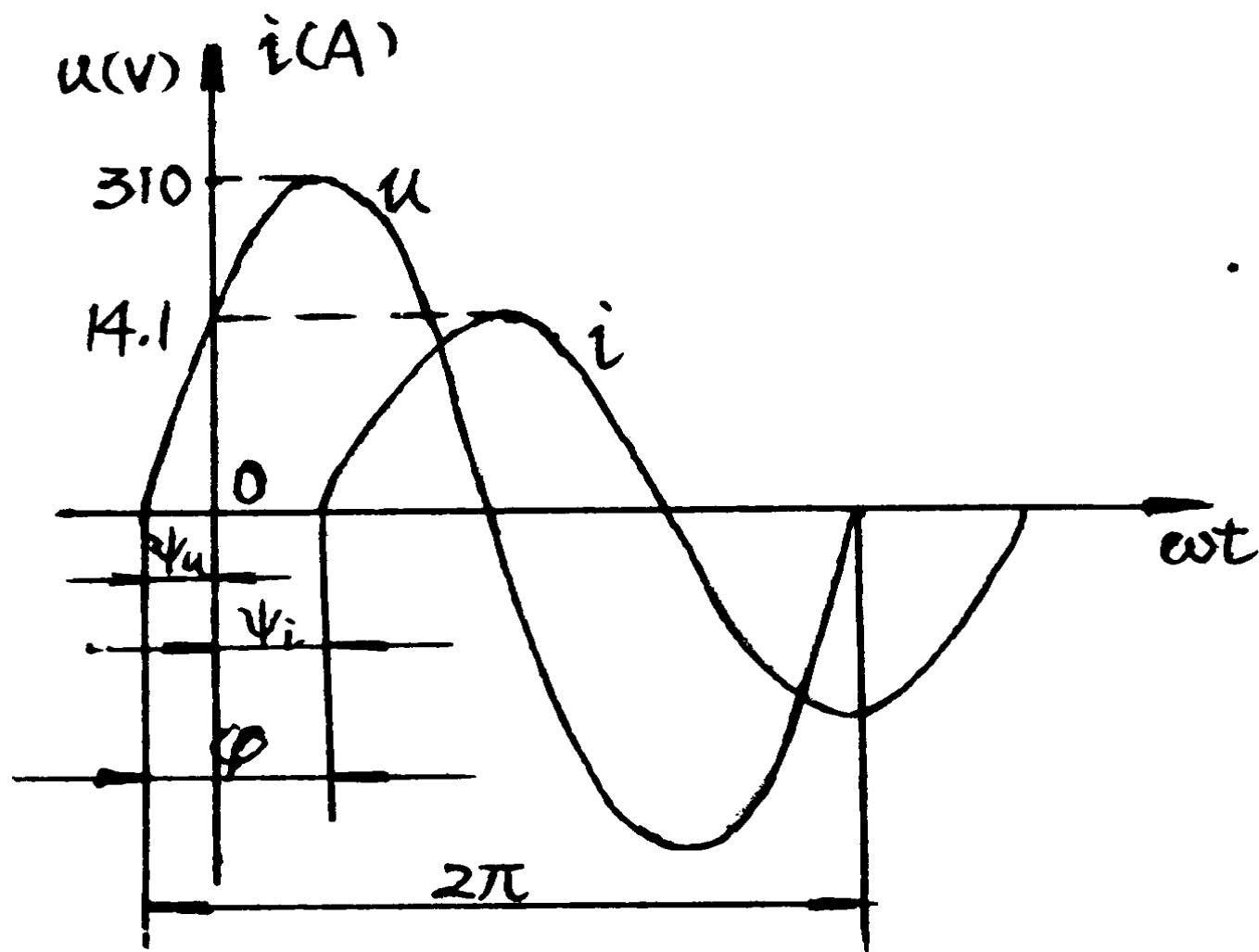
画出它们的波形。

解：电压的瞬时值表达式为：

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 311 \sin(2\pi f t + \psi_u) \\ &= 311 \sin(314t + 30^\circ) V \end{aligned}$$

电流的瞬时值表达式为：

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 14.1 \sin(314t - 60^\circ) A$$

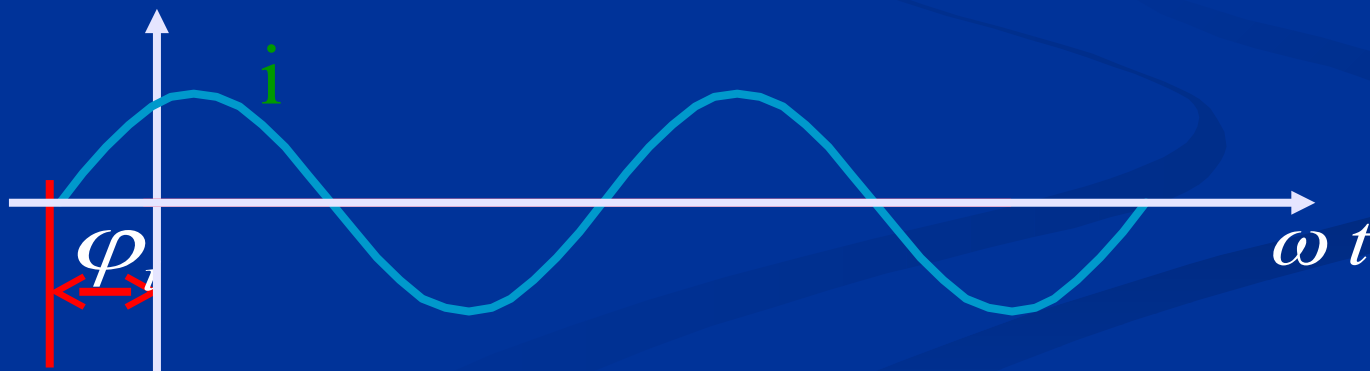


3. 初相位与相位差

初相位：

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

φ_i : t=0 时的相位，称为初相位或初相角。



相位差：

两个**同频率**正弦量的相位的差值称为的相位差。

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

相位差： $\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$

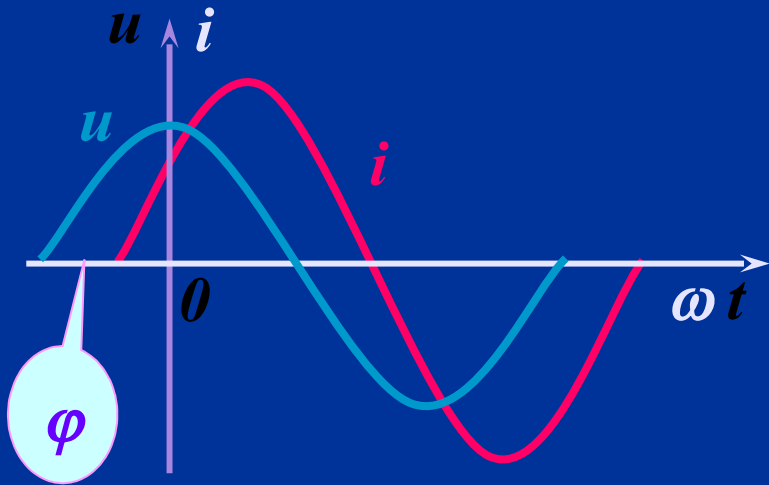
可见，同频率正弦量之间的相位差等于初相位之差。

相位差： $\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$

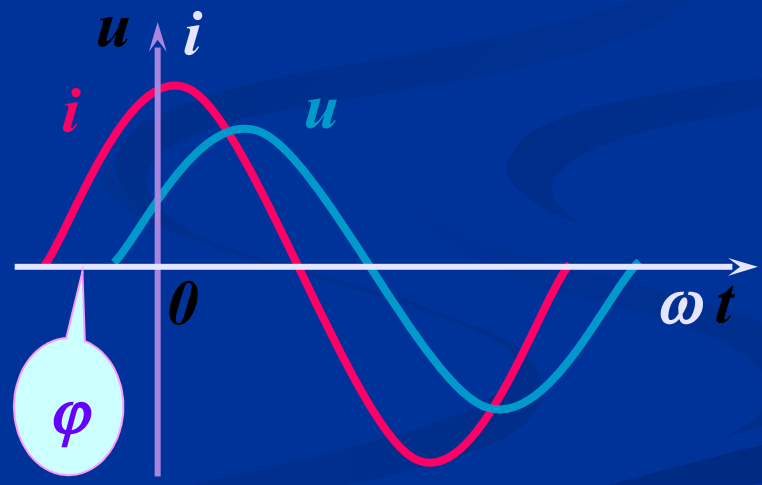
规定： φ 的取值范围是： $|\varphi| \leq \pi$

a. 如果： $\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$ 称 u 超前 i φ 角。

b. 如果： $\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$ 称 u 滞后 i φ 角。



u 超前 i φ 角

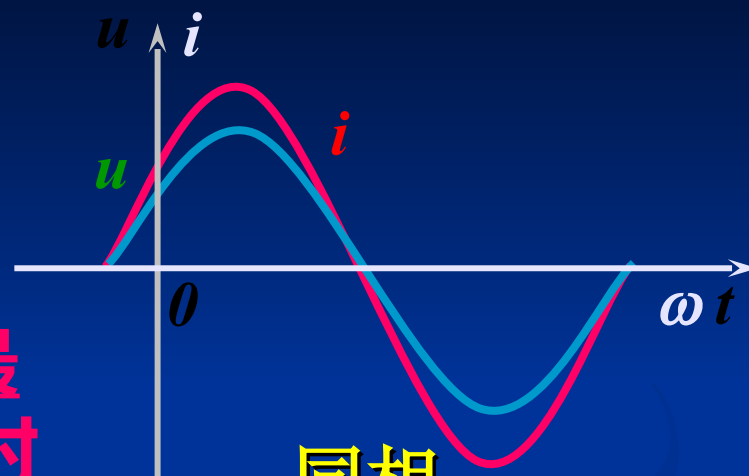


u 滞后 i φ 角

c. 如果： $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$

称同相

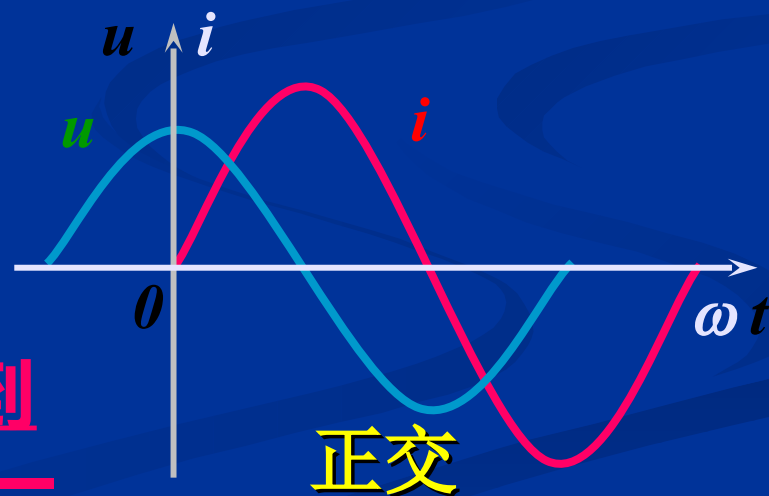
特点：两正弦量同时达到最大值，或同时过零点。



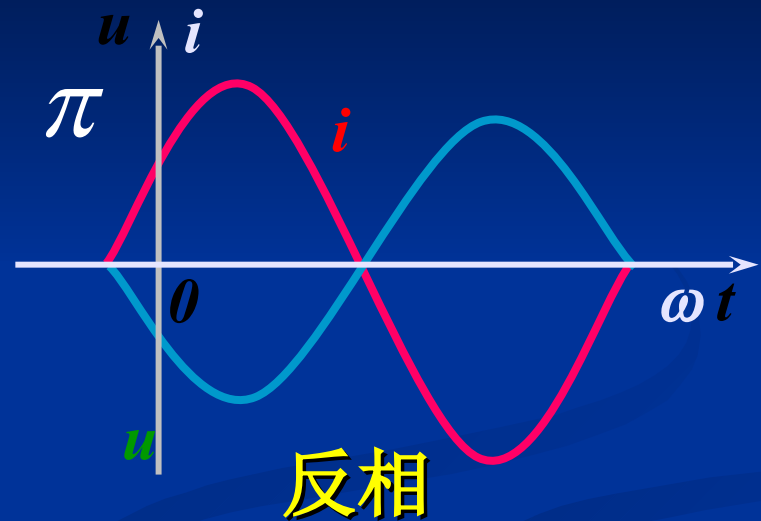
d. 如果 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$

称正交

特点：当一正弦量的值达到最大时，另一正弦量



e. 如果 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi$
称反相

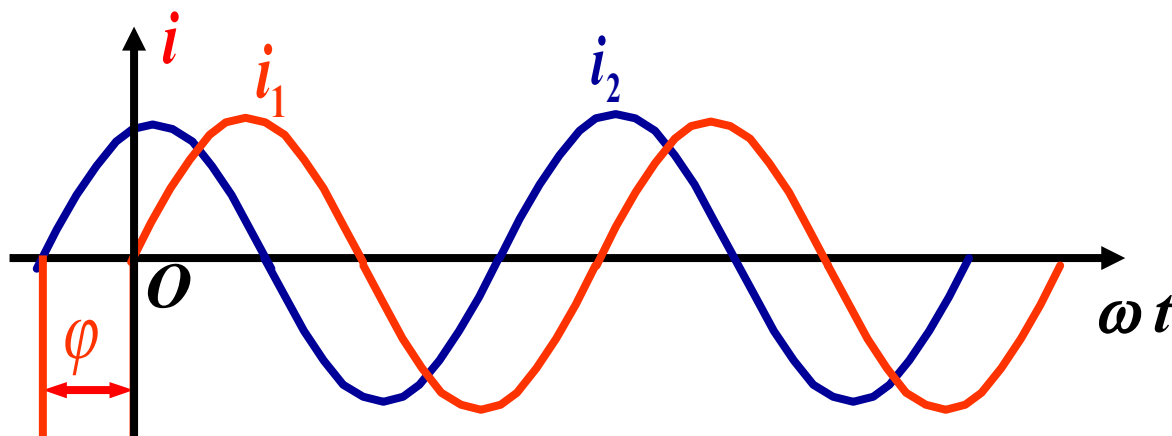


特点：

当一正弦量的值达到最大时，另一正弦量的值刚好是负最大值。

注意：

- ① 两同频率的正弦量之间的相位差为常数，与计时的起点无关。



- ② 频率不同的正弦量比较相位无意义。

例： 已知： $i = \sin(1000t + 30^\circ)A$

问 i 的幅值、频率、初相位为多少？

幅度： $I_m = 1A$ $I = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707A$

频率： $\omega = 1000 \text{ rad} / s$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159 \text{ Hz}$$

初相位： $\varphi = 30^\circ$



4. 正弦交流量的向量表示（略）

向量：大小 ---- 有效值（或者最大值），
方向 ---- 初相角。

向量的表示符号为： $\dot{U}$ $\dot{I}$ $\dot{E}$

如果向量的大小表示交流电的最大值，
则表示为： $\dot{I}_m$ $\dot{U}_m$ $\dot{E}_m$

向量在复平面上的图形叫向量图。

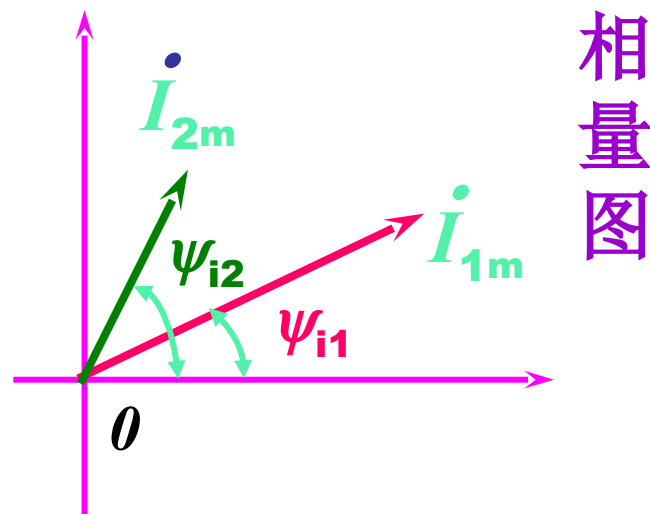
【例】若 $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1})$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{i2}),$$

画出相量图

分析：

根据 i_1 、 i_2 的振幅、初相，可直接画出其相量图。

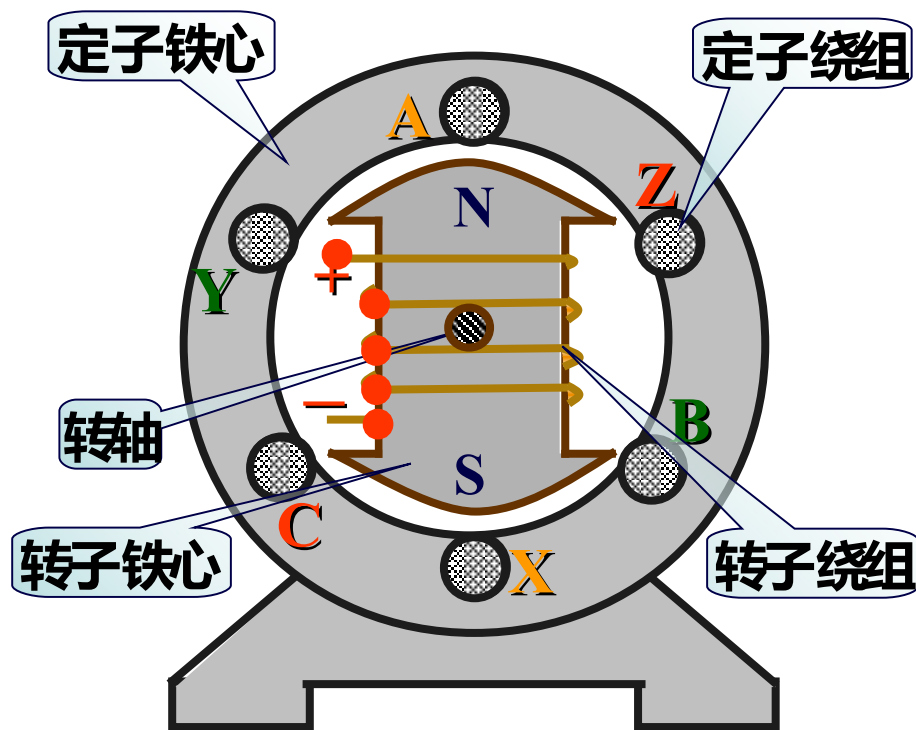


例 2-3：讲解之

广州城建职业学院

二、三相电源

三相交流电是由三相发电机产生的。



三相定子绕组与旋转磁场相切割，感应对称三相电动势。

首端：A B C
尾端：X Y Z

三相定子绕组对称嵌放在定子铁心槽中。

转子绕组通电后产生磁场，转子绕组旋转，形成旋转磁场。

$$e_A = E_m \sin \omega t$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$

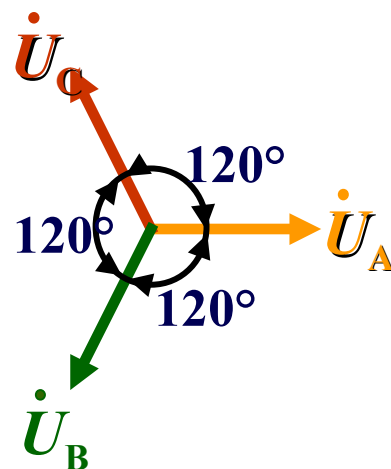
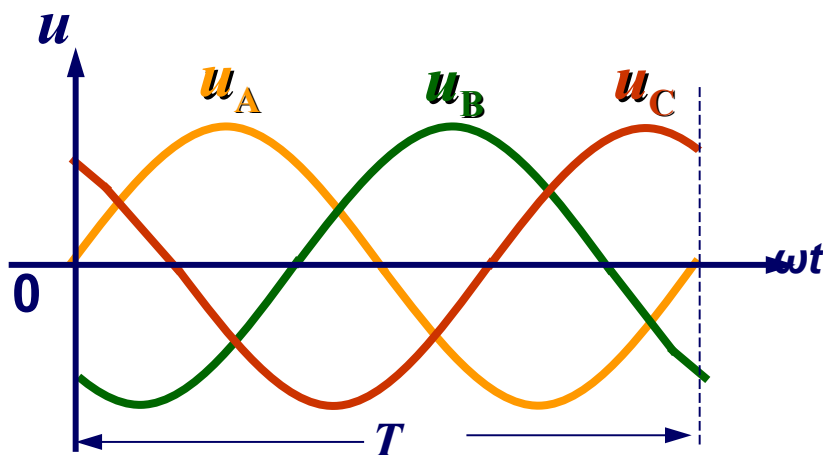
电路分析很少用电动势，常用电压表示。以 A 相绕组的感应电压为参考（初相位为 0），则发电机感应的对称三相电压分别为：

$$u_A = U_m \sin \omega t$$

$$u_B = U_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

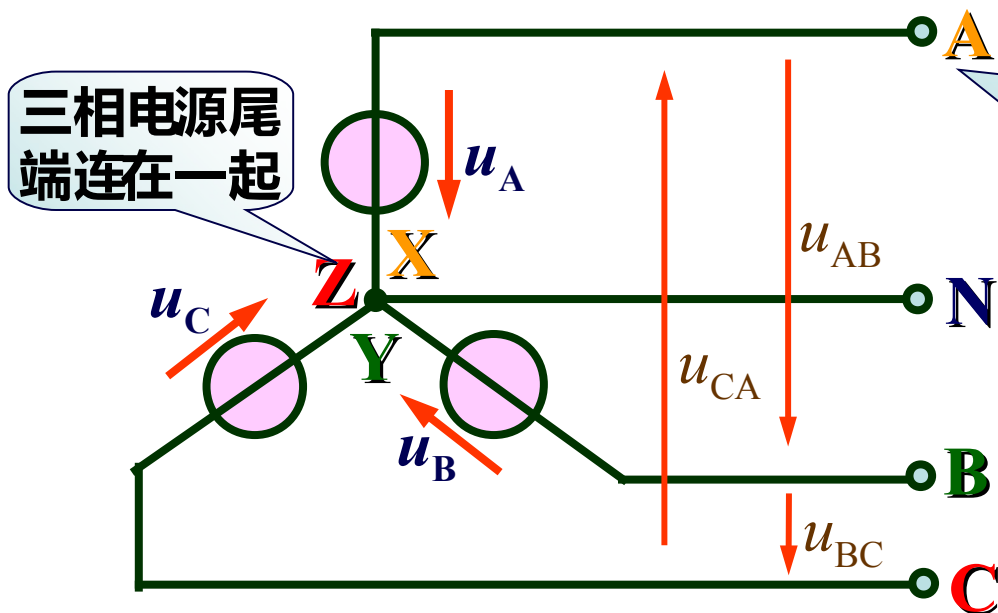
$$u_C = U_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$

1. 对称三相交流电的特点



对称三相交流电最大值相等，频率相同，相位互差 120° 。

2. 三相电源的星形 (Y) 连接方式



三相电源首端分别向外引出端线，俗称**火线**。

(三条火线颜色分别是黄、绿、红；零线是蓝色，地线则是黄绿相间。)

尾端公共点向外引出的导线称为**中线**，中线俗称**零线**。

相电压，相电流；线电压，线电流？？？

结论：三相电源绕组作Y形连接时，可以向负载提供两种电压。 这种供电系统称为三相四线制。

(通常电源绕组的连接方式为星形)

线电压与相电压之间的关系：

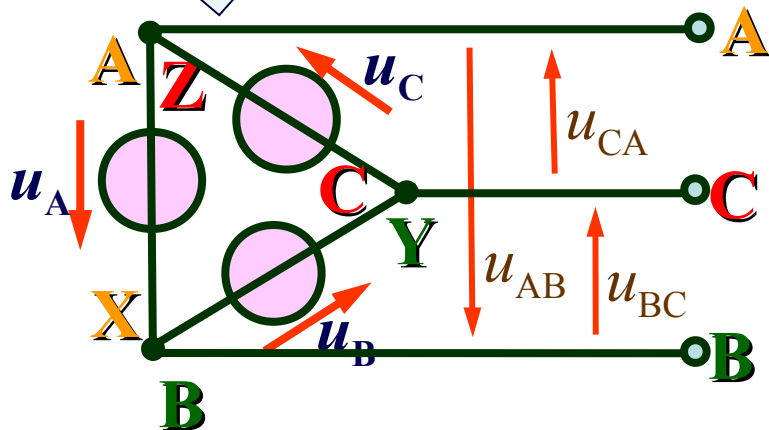
$$U_{AB} = \sqrt{3}U_A$$

数量上，线电压 u_{AB} 是相电压 u_A 的 1.732 倍；相位上，线电压超前与其相对应的相电压 30° 电角！

$$U_l = \sqrt{3}U_p$$

3. 三相电源的三角形 (Δ) 连接方式

三相电源首尾
相接构成闭环



在电源的三个连接点处
分别外引三根火线。

显然，电源绕组
作 Δ 接时，有：

$$U_l = U_p$$

结论：显然发电机绕组作 Δ 接时，只能向负载提供一种电压！此种供电系统称为三相三线制。



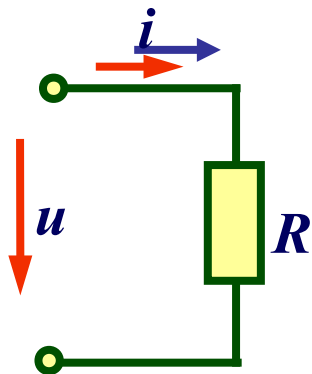
2.3 交流电路中的负载

交流电路中的负载有： R 、 L 、 C ，它们对电流都有阻碍作用。

主要掌握： u 与 i 的关系（大小、相位）

阻抗的计算，
功率的计算。

1. 电阻元件



(1) 电压、电流关系

$$i = \frac{u}{R}$$

电流、电压的瞬时值表达式：

设 $i = I_m \sin \omega t$

u、i 同相

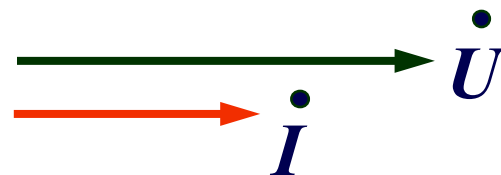
则 $u = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t$

u 、 i 最大值或有效值之间符合欧姆定律的数量关系：

$$U_m = I_m R \text{ 或 } U = IR$$

U 与 i 相量关系式

相量图



(2) 平均功率 P (有功功率)

平均功率用大写！

一个周期内的平均值：

$$P = UI$$

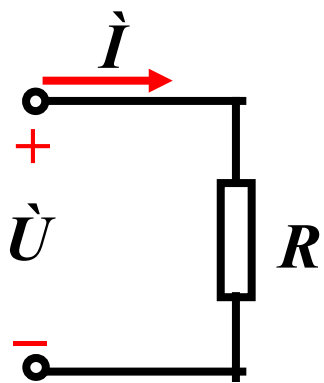
$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

例 求 “220V、100W” 和 “220V、40W” 两灯泡的电阻。
解 $R_{100} = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$, $R_{40} = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{40} = 1210\Omega$

可见，额定电压相同时，瓦数越大的灯泡，其灯丝电阻越小。而瓦数越大向电源吸取的功率越多，视其为大负载。学习时一定要区别大电阻和大负载这两个概念。

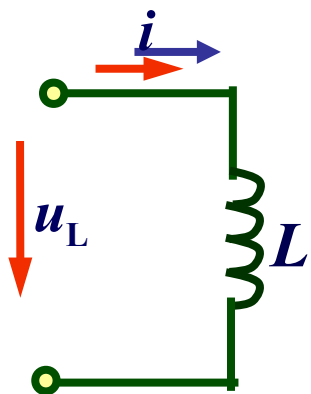
例 2-5 , $u = \sqrt{2} \times 220 \sin(314t) \text{ V}$, $R=50 \text{ 欧}$,
求电流 的表达式 。

解：由于 $I=U/R=220/50=4.4 \text{ 欧}$ ，电压与电流同相位，



$$I = \sqrt{2} \times 0.91 \sin(314t) (A)$$

2. 电感元件



(1) 电压、电流关系

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

电流、电压的瞬时值表达式：

设 $i = I_m \sin \omega t$

则 $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt}$

u 在相位上超前 i 90° 电角！

$$= I_m \omega L \cos \omega t = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

u 、 i 最大值的数量关系为： $U_{Lm} = I_m \omega L = I_m X_L$

导出 u 、 i 的有效值关系式

：

$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{U_L}{2\pi f L} = \frac{U_L}{\omega L}$$

上式称为电感元件上的欧姆定律表达式。

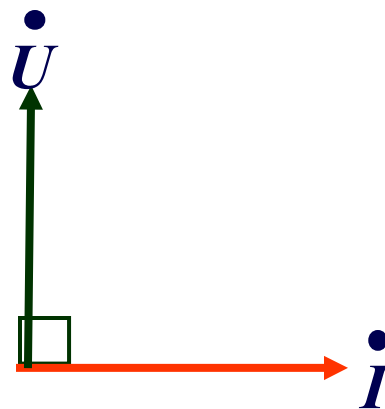
$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{U_L}{2\pi fL} = \frac{U_L}{\omega L}$$

式中 X_L 称为电感元件的感抗。感抗反映了电感元件对正弦交流电流的阻碍作用。单位也是 $[\Omega]$ 。

U 和 i 的相量关系式为

:

(相量图为)



感抗与哪些因素有关?

直流情况下感抗为多大?

直流情况下频率 $f=0$, 因此感抗等于零, 电感元件相当于短路。

(2) 平均功率

P

$$P = 0$$

电感元件不耗能！

(3) 无功功率

Q

电感元件虽然不耗能，但它与电源之间的能量交换始终在进行，这种电能和磁场能之间交换的规模可用无功功率来衡量。即：

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L}$$

为和有功功率相区别，无功功率的单位定义为乏尔 [Var]。



1. 电源电压不变，当电路的频率变化时，通过电感元件的电流发生变化吗？

f 变化时 X_L 随之变化，导致电流 i 变化。

2. 能从字面上把无功功率理解为无用之功吗？

不能！感性设备如果没有无功功率，则无法工作！无功功率意味着只交换不消耗。

例：一个 $L=0.01\text{H}$ 的电感接到 $f=50\text{Hz}$, $U=220\text{V}$ 的正弦电源上, (1) 求电感电流 I ; (2) 如保持 U 不变, 而电源 $f=5000\text{Hz}$, 这时 I 为多少?

解: (1) 当 $f=50\text{Hz}$ 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.01 = 3.14\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{3.14} = 70 \times 10^{-3} \text{ A}$$

(2) 当 $f=5000\text{Hz}$ 时

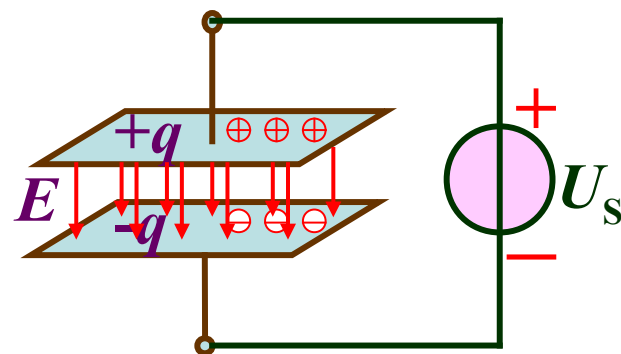
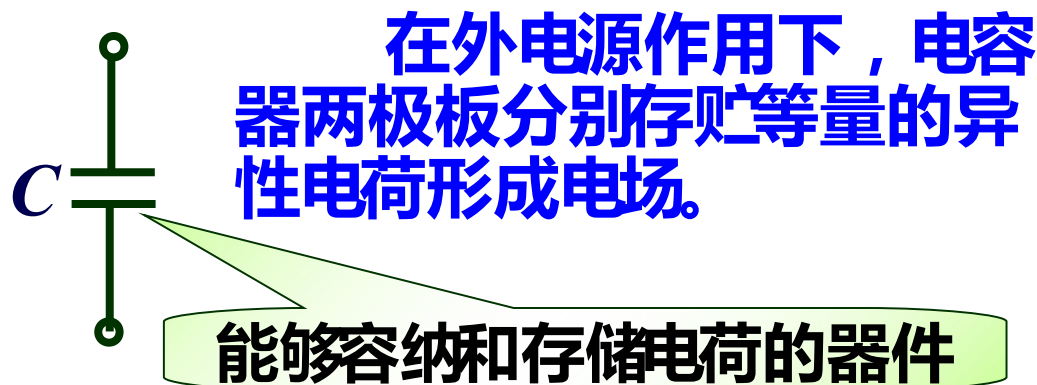
$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 5000 \times 0.01 = 314\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{314} = 0.70 \times 10^{-3} \text{ A}$$

3. 电容元件



两块平行的金属极板就可构成一个电容器。

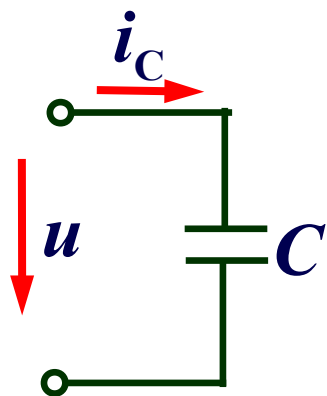


电容器的储能本领用电容量 C 表示： $C = \frac{q}{u}$ 或 $q = Cu$

式中电荷量 q 的单位是库仑 [C]；电压 u 的单位是伏 [V]；电容量 C 的单位为法拉 [F]。

$$1\text{F} = 10^6\mu\text{F} = 10^9\text{nF} = 10^{12}\text{pF}$$

(1) 电压、电流关系



设： $u = U_m \sin \omega t$

则： $i_C = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt}$

$= U_m \omega C \cos \omega t$ **i 超前 u 90° 电角！**

$= I_{Cm} \sin(\omega t + 90^\circ)$

$I_{Cm} = U_m \omega C \rightarrow I_C = \frac{U}{X_C}$

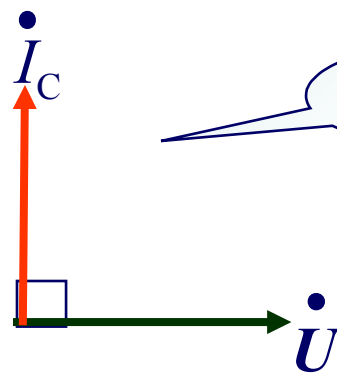
i 和 u 有效值符合欧姆定律！

其中： $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$

ui 相量表达式： $\dot{I}_C$

相量图

称为电容元件的容抗。
容抗反映了电容元件对正弦交流电流的阻碍作用。



(2) 平均功率

P

(3) 无功功率

Q

$$P = 0$$

电容元件不耗能！

电容元件和电源之间的能量交换规模也是用无功功率衡量的。即：

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C} \quad [\text{Var}]$$



问题与讨论

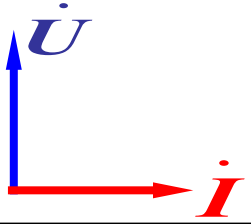
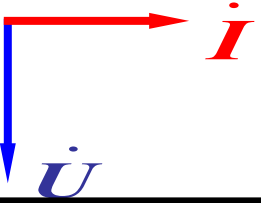
1. 直流情况下，电容器的容抗多大？

直流情况下频率 f 等于零，因此容抗等于无穷大，即直流下电容器相当于开路

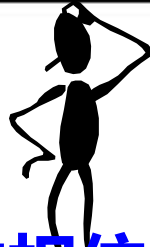
2. 容抗与哪些因素有关？

容抗与频率成反比，与电容量成反比。

小结 单一参数电路中的基本关系

参数	电路图	基本关系	阻抗	相量图
R	略	$u = iR$	R	
L	略	$u = L \frac{di}{dt}$	$X_{\omega L}$	
C	略	$i = C \frac{du}{dt}$	$X_c = \frac{1}{\omega C}$	

想想 练练



1. 电阻元件在交流电路中电压与电流的相位差是多少？判断下列表达式的正误。

(1) $i = \frac{U}{R}$; (2) $I = \frac{U}{R}$; (3) $i = \frac{U_m}{R}$; (4) $i = \frac{u}{R}$

2. 纯电感元件在交流电路中电压与电流的相位差是多少？感抗与频率有何关系？判断下列表达式的正误。

(1) $i = \frac{U}{X_L}$; (2) $I = \frac{U}{\omega L}$; (3) $i = \frac{u}{\omega L}$; (4) $I = \frac{U_m}{\omega L}$

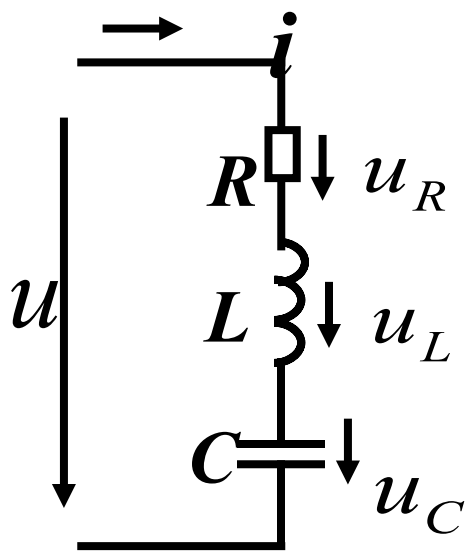
3. 纯电容元件在交流电路中电压与电流之间的相位差是多少？容抗与频率有何关系？判断表达式的正误。

(1) $i = \frac{U}{X_C}$; (2) $I = \frac{U}{\omega C}$; (3) $i = \frac{u}{\omega C}$; (4) $I = U\omega C$

2.4 单相正弦交流电路

2.4.1 串联电路的分析和计算

1. R 、 L 、 C 串联电路



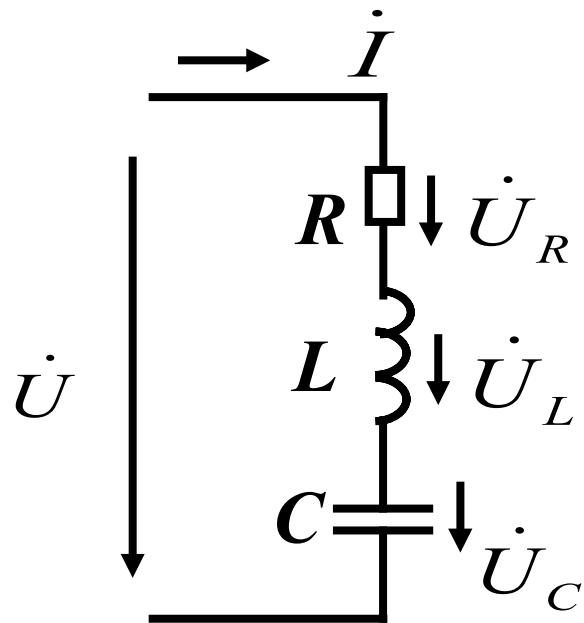
设： $i = \sqrt{2}I \sin \omega t$

则： $u_R = ?$

$u_L = ?$

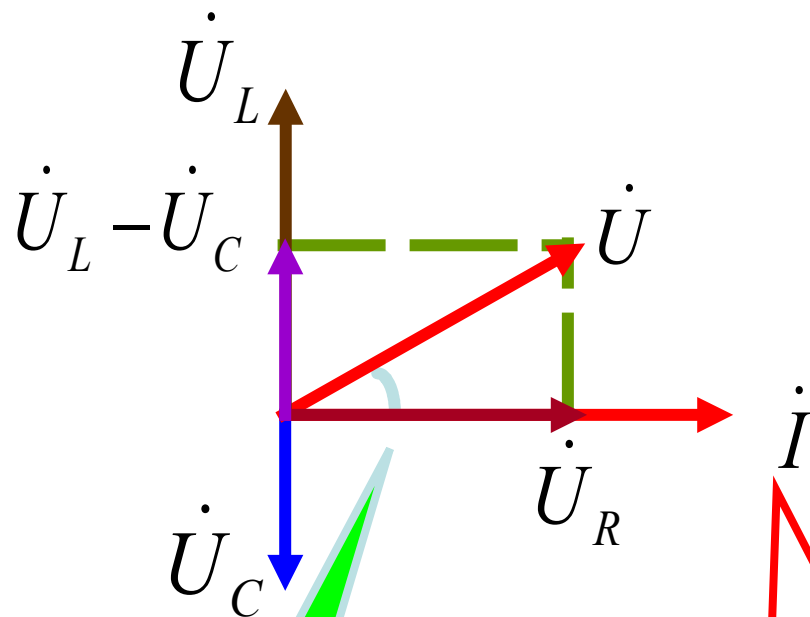
$u_C = ?$

R-L-C 串联交流电路 -- 相量图



相量表达式:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$



先画出参考相量

从上面的向量图可以看出：

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{U_L - U_C}{U_R}$$

将 $U_R = IR$, $U_L = IX_L$, $U_C = IX_C$ 代入，得

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

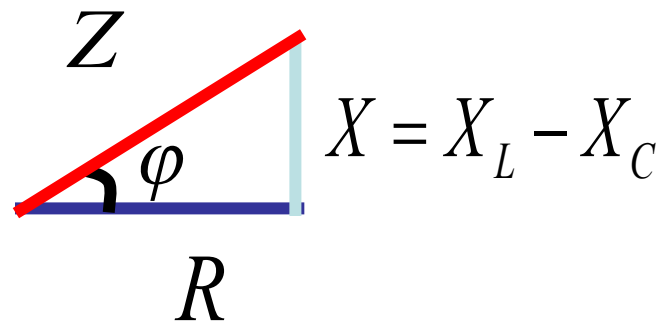
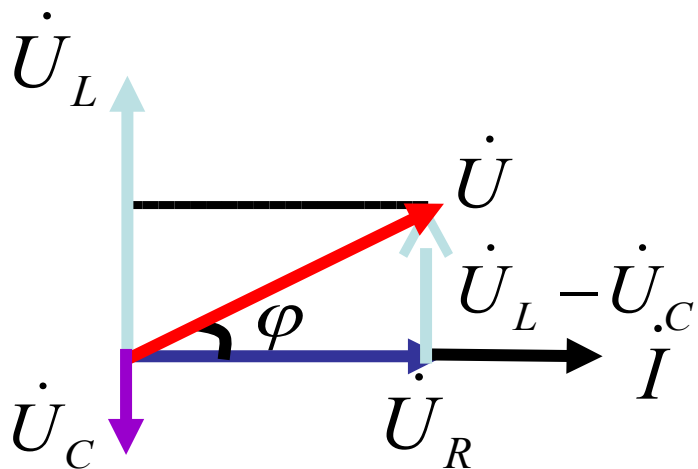
令： $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ 为串联电路的总阻抗；

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

为电路的阻抗角。

阻抗三角形和电压三角形的关系：

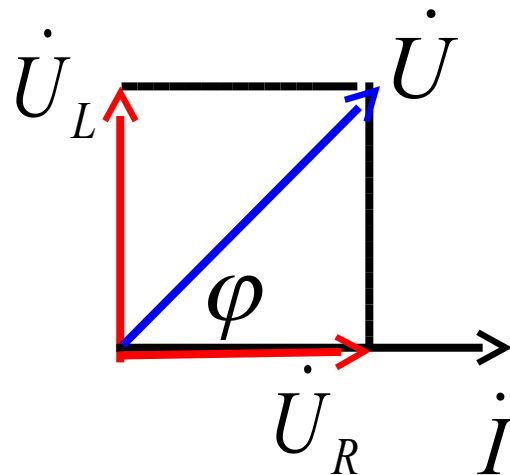
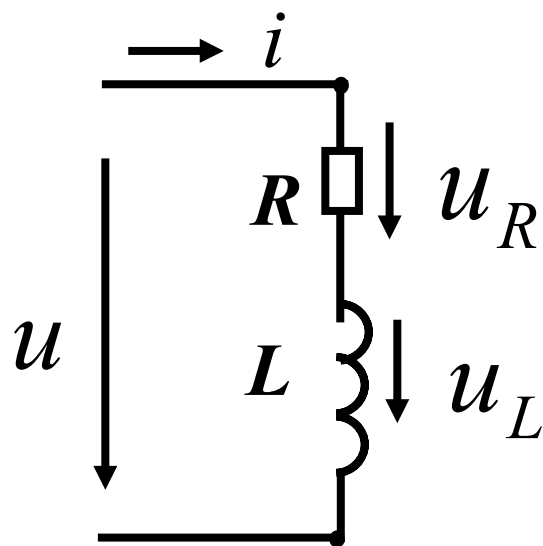
有效值： $U = IZ$ $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$



$U = ZI$
 $U_L - U_C = IX_L - IX_C$
 $U_R = IR$

2. R、L 串联电路

大家想一下，我们的电动机或者前面讲过日光灯可以看作是 _____ 元件和 _____ 元件串联。我们怎么来分析它？



电压的大小和初相位分别为：

$$U = I\sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L}{R}$$

电路的阻抗为：

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

（那么我们是不是可以用同样的方法来分析 R、C 和 L、C？）

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

当 $X_L > X_C$ 时 $\varphi > 0$

表示 u 超前 i

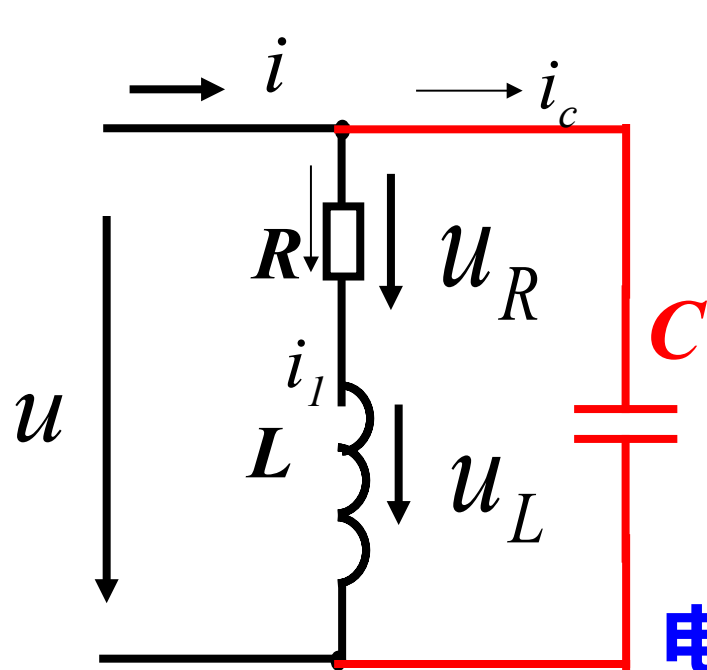
当 $X_L < X_C$ 时 $\varphi < 0$,
—— 电路呈容性;

表示 u 滞后 i

当 $X_L = X_C$ 时 $\varphi = 0$,
—— 电路呈电阻性

表示 u 、 i 同相

2.4.2 并联电路的分析和计算



设: $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$

得: $i_c = \sqrt{2} \frac{U}{X_C} (\omega t + 90^\circ)$

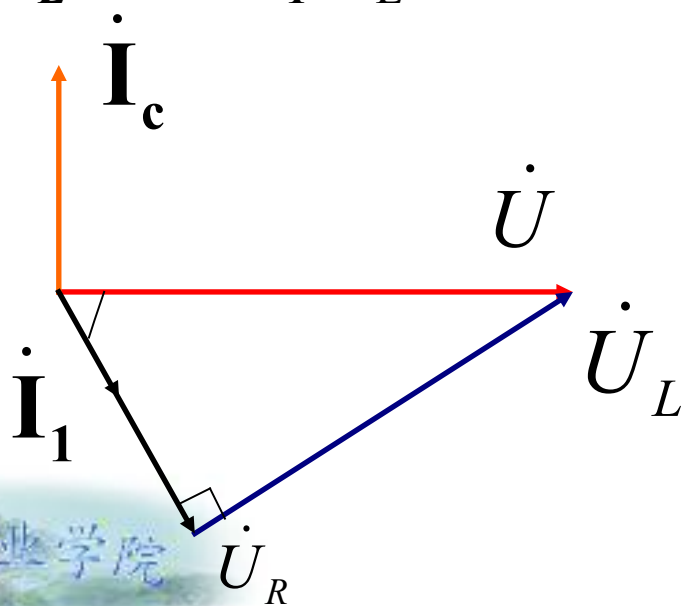
根据 R、L 串联电路的电压、电流的关系，知道电压 u 超前电流，因此可以假设的表达式为：

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

式中: $I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}, \quad \varphi_1 = \arctan \frac{X_L}{R}$

则: $u_R = \sqrt{2}I_1 R \sin(\omega t - \varphi_1)$

$$u_L = \sqrt{2}I_1 X_L \sin(\omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{2})$$



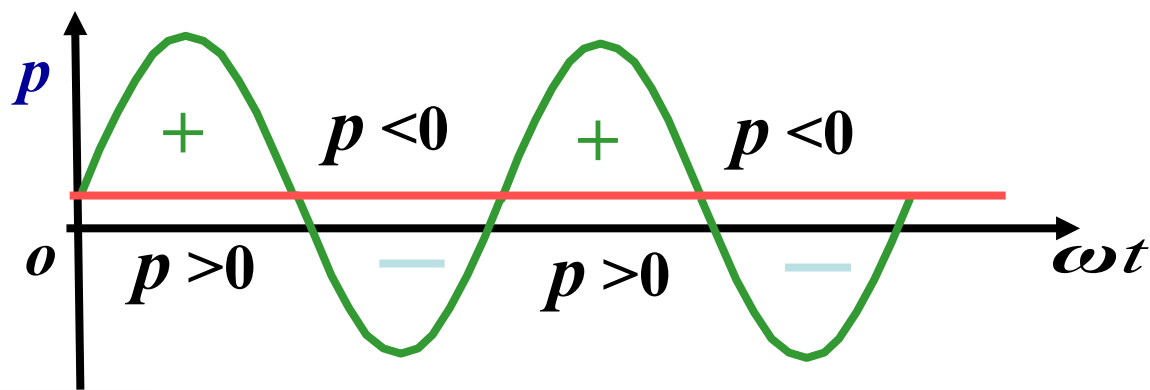
2.4.3 功率的计算

1. 瞬时功率

设： $i = I_m \sin \omega t$ $U, \quad = U_m \sin (\quad + \varphi)$

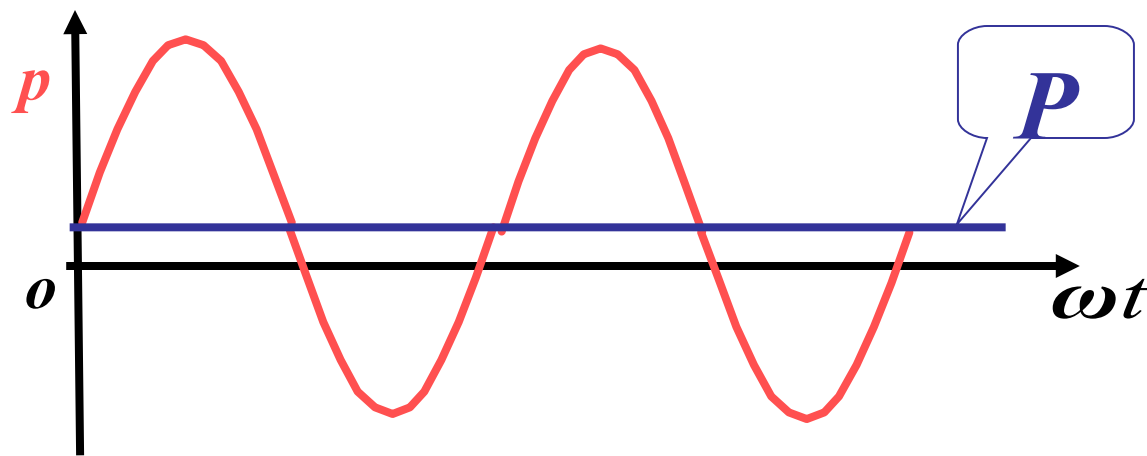
$$p = u i = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi) \sqrt{2}I \sin \omega t$$

$$= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$



2. 有功功率（有功功率）

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi)] dt \\ &= UI \cos \varphi \end{aligned}$$



$$P = UI \cos \varphi$$

其中： $\lambda = \cos \varphi$ **称为功率因数**

φ **为功率因素角**， **其数值和阻抗角相等。**

那么纯电阻元件、纯电感元件、纯电容元件的功率因素角分别为：

$$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2}$$

纯电阻元件，功率因数为？

纯电感元件，功率因素为？

纯电容元件，功率因素为？



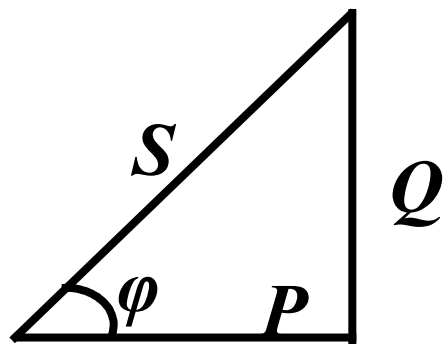
3. 无功功率

储能元件 L、C 虽然不消耗能量，但与电源有能量交换，交换的规模用无功功率来表示。

无功功率： $Q = Q_L - Q_C$ var (乏)

4. 视在功率

在正弦交流电路中，电压有效值与电流有效值的乘积称为视在功率，单位是伏安（VA）



功率三角形

$$S = UI$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

可以看出，电感性电路 $Q > 0$ ；电容性电路 $Q < 0$ 。

2.5 三相正弦交流电路

2.5.1. 三相负载的星形联结

3个同样的负载按图 2-33 的方式联接, $Z_{AN}=Z_{BN}=Z_{CN}$, 称为三相对称星形负载。 当接有中线时, 中线电流等于 0

中线上的电流为零就可以不接中线, 一般的三相对称星形负载是不接中线的, 每相负载的电压就是星形三相电源的相电压。

$$U_Z = U_P$$

$$I_Z = I_P$$

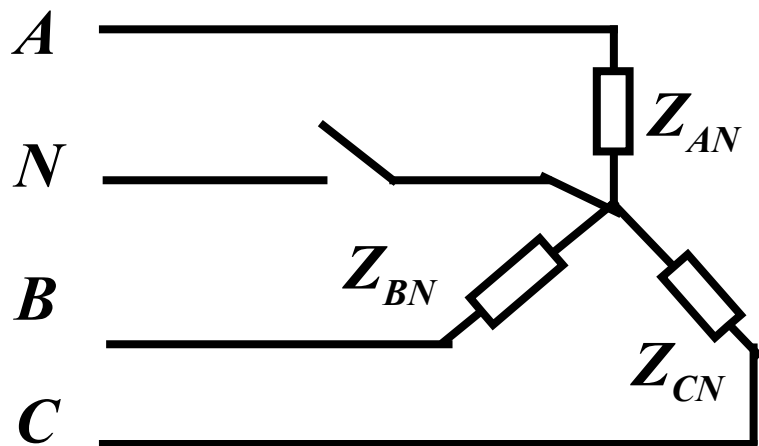


图 2-33

2.5.2. 三相负载的三角形联结

3个同样的负载按图 2-34 的方式联接， $Z_{AB}=Z_{BC}=Z_{CA}$ ，称为三相对称三角形负载。

$$U_Z=U_P, I_Z=I_P$$

[例 2-10] 和 [例 2-11] : 结论。

[例 2-12]

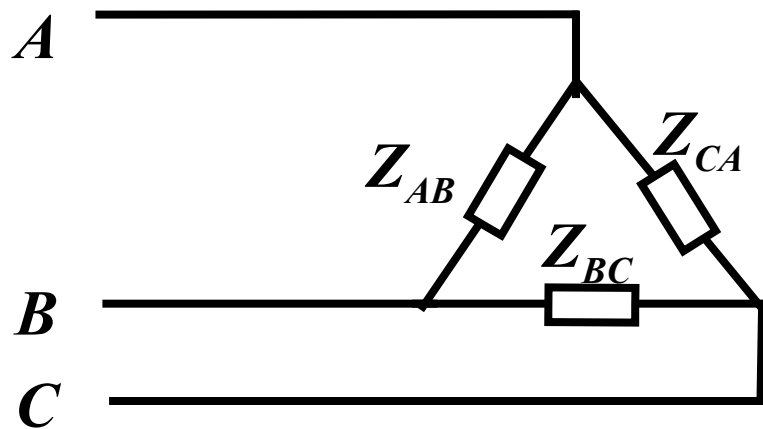


图 2-34

2.5.4 三相电路的功率

复习单相交流电路功率： $P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$, $S = UI$

1. 三相电路的功率

a. 三相电路不对称时，各种功率分别为：

$$P = P_U + P_V + P_W \quad (\text{W})$$

$$Q = Q_U + Q_V + Q_W \quad (\text{Var})$$

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} \quad (\text{VA})$$

其中容性 Q 为负值，
感性 Q 为正值。

b. 三相电路对称时，各种功率分别为

:

Y 接时

$$U_l = \sqrt{3}U_P, \quad I_l = I_P$$

:

Δ 接
时:

$$U_l = U_P, \quad I_l = \sqrt{3}I_P$$

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi = 3U_P I_P \cos \varphi (\text{W})$$

和连接方法
有无关系？

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi = 3U_P I_P \sin \varphi (\text{Var})$$

无关！

$$S = \sqrt{3}U_l I_l = 3U_P I_P (\text{VA})$$

3.7 正弦交流电路中的谐振

交流电路中电压与电流一般会有相位差。调节信号源频率或者元件参数，使得电压与电流同相位，这种现象称为谐振。

3.7.1 串联谐振

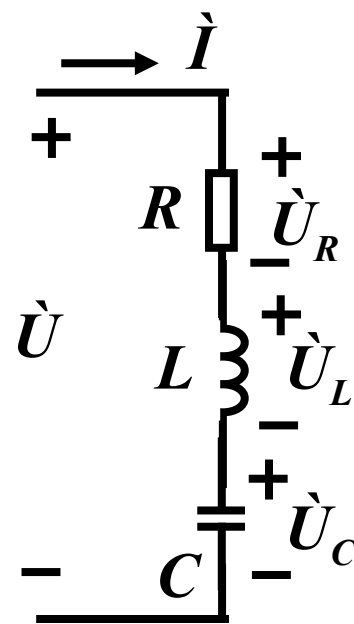
发生在 RLC 串联电路中的谐振称为串联谐振。图 3-31

(a) 所示串联电路，其阻抗为

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

若电路处于谐振状态，阻抗应为纯电阻，必须满足

$$X_L - X_C = 0$$



(a)

图 3-31

若电路处于谐振状态，阻抗应为纯电阻，
必须满足

$$X_L - X_C = 0$$

即

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

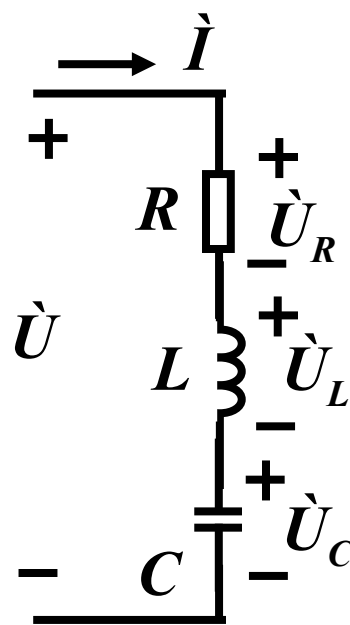
发生谐振时的角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-46)$$

谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-47)$$

串联谐振电路主要的特点是



(a)

图 3-31

串联谐振电路主要的特点是

(1) 电流与电压同相位，电路呈现电阻性。

(2) 串联阻抗最小，电流最大，由于 $Z=R$ ，故电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

(3) 电感电压与电容电压大小相等相位相反，之和为零，电阻电压等于电源电压。

(4) 谐振时电感电压与电源电压之比称为品质因数，用 Q 表示（前面用同样的符号 Q 表示了无功功率）

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L I}{R I} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

注意：电感电压与电容电压有可能远远大于电源电压。

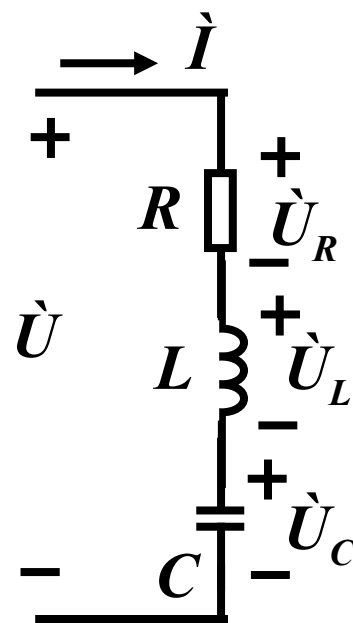
[例 3-14] 图中电路, $R_1=10\ \Omega$,

$L=0.26\times 10^{-3}\text{H}$, $C=238\times 10^{-12}\text{F}$ 。

求 (1) 谐振频率 f_0 ;

(2) 该电路的品质因数 Q ;

(3) 若输入 $f=640\times 10^3\text{Hz}$ 、
 $U=10\times 10^{-3}\text{V}$ 的信号电源, 求
电路电流 I 和电感电压 U_L 的有效值。



(4) 若输入 $f=960\times 10^3\text{Hz}$ 、 $U=10\times 10^{-3}\text{V}$ 的信号
电源, 求电路电流 I 和电感电压 U_L 的有效值。

解: 谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.26\times 10^{-3}\times 238\times 10^{-12}}} = 640\times 10^3(\text{Hz})$$

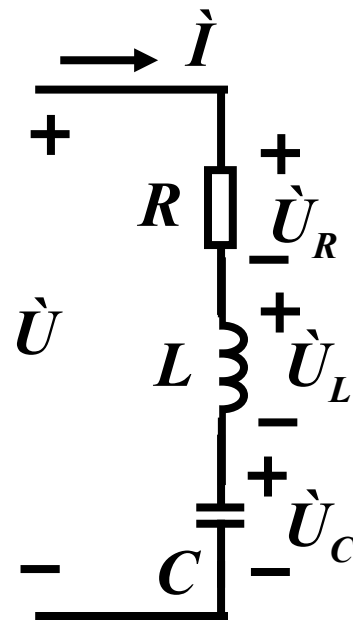
(2) 该电路的品质因数 Q :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= \frac{2\pi \times 640 \times 10^3 \times 0.26 \times 10^{-3}}{10} \\ &= 105 \end{aligned}$$

(3) 信号源频率 $f=640 \times 10^3 \text{Hz}$ 等于电路的谐振频率, 因此

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10 \times 10^{-3}}{10} = 1 \times 10^{-3} (\text{A})$$

$$U_L = QU = 105 \times 10 \times 10^{-3} = 1.05 (\text{V})$$



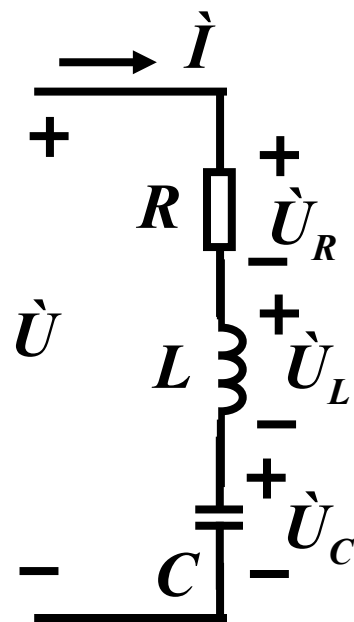
(4) $f=960 \times 10^3 \text{Hz}$ 时

(4) $f=960\times 10^3\text{Hz}$ 时

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 870^2} \approx 870(\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} = \frac{10 \times 10^{-3}}{870} \\ &= 11.5 \times 10^{-6}(\text{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_L &= \omega L I \\ &= 2\pi \times 0.26 \times 10^{-3} \times 11.5 \times 10^{-6} \\ &= 0.018(\text{V}) \end{aligned}$$



3.7.2 并联谐振

发生在 RLC 并联电路中的谐振称为并联谐振。图 3-33 (a) 所示并联电路，其电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \left[\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \dot{U}$$

若电路处于谐振状态，电流与电压同相位，阻抗应为纯电阻，必须满足

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

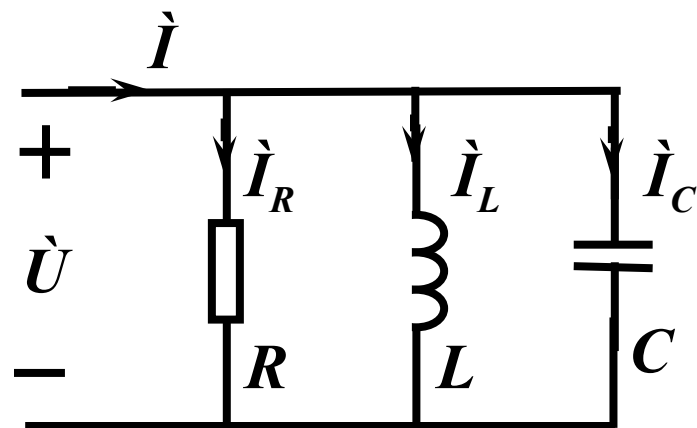


图 3-33
(a)

发生谐振时的角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-49)$$

这两个表达式与串联谐振时相同。

并联谐振电路主要的特点是

- (1) 电流与电压同相位，电路呈现电阻性。
- (2) 并联阻抗最大，电流最小，由于 $Z=R$ ，故电流为

$$\dot{I} = \frac{U}{R}$$

串联谐振电路主要的特点是

(3) 电感电流与电容电流大小相等相位相反, 之和为零补偿, 电路总电流等于电阻电流。

(4) 谐振时电感电流与总电流之比称为品质因数, 用 Q 表示 (前面用同样的符号 Q 表示了无功功率)

$$Q = \frac{U/\omega_0 L}{U/R} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

注意: 电感电流与电容电流有可能远远大于电源电流。

[例] 图 3-34 为并联谐振电路, 试计算其谐振频率。

解: 图中电流

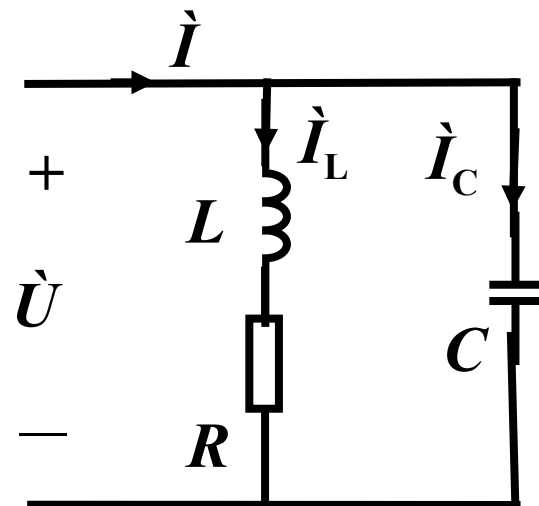


图 3-34

解：图中电流

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} + j\omega C \dot{U}$$

$$= \left(\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \right) \dot{U}$$

$$= \left(\frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C \right) \dot{U}$$

$$= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \dot{U}$$

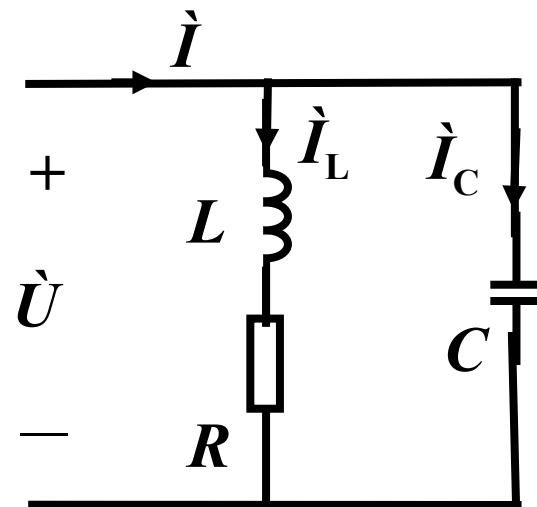


图 3-34

并联谐振时电流与电压同相位，上式中虚部等于零，即

并联谐振时电流与电压同相位，上式中虚部等于零，即

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

解出谐振角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

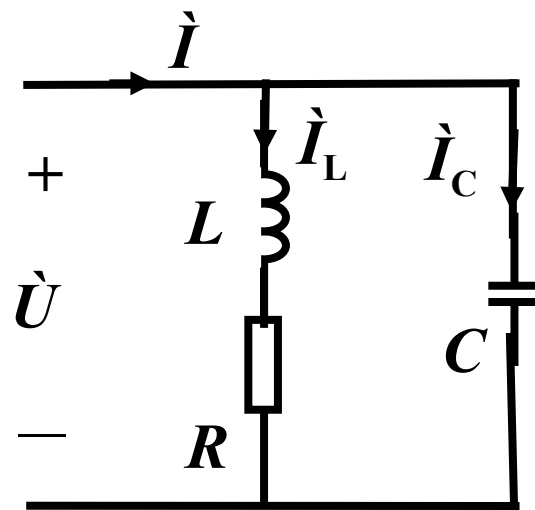


图 3-34

3.8 非正弦周期电流电路

在生产和科学实践中经常遇到非正弦电压与电流。产生非正弦电压与电流的原因有两个，一个是电源或信号源本身就是非正弦的；另一个是电路中有非线性元件，如铁心线圈、整流电路等。

3.8.1 非正弦量的谐波分析

由数学知识可知，一个非正弦周期函数，可以分解为直流分量和一系列不同频率的正弦分量之和，即展成傅立叶级数。

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cos K\omega t + b_K \sin K\omega t)$$

式中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ， T 为 $f(t)$ 的周期，为正整数。

同频率的正弦量与余弦量之和可以合并，上面的傅立叶级数还可以写成

$$f(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{\infty} A_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K) \quad (3-50)$$

式中 $A = a_0$, $A_{Km} = \sqrt{a_K^2 + b_K^2}$, $\psi_K = \arctan \frac{a_K}{b_K}$ 。

其中 A_0 称为直流分量； $A_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K)$ 是第 K 次谐波； $K=1$ 时是与原非正弦周期函数同频率的正弦波，称为基波； $K=2$ 时称为 2 次谐波， $K \geq 2$ 时统称为高次谐波。从展开式中看到，谐波次数越高，其幅值越小。所以工程上常取前几项之和而忽略其余的高次项。当然，所取的谐波项数越多，其和与原非正弦周期函数的值就越接近。

3.8.2 非正弦周期量的有效值和功率

(一) 有效值

根据交变电压和电流有效值的公式

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

可以推出非正弦周期电压与电流的有效值分别为

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

上式表明，非正弦电压或电流的有效值等于其各个分量有效值平方和的平方根。

(二) 功率

由 $p(t) = u(t)i(t)$ 和 $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ 可以得到

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

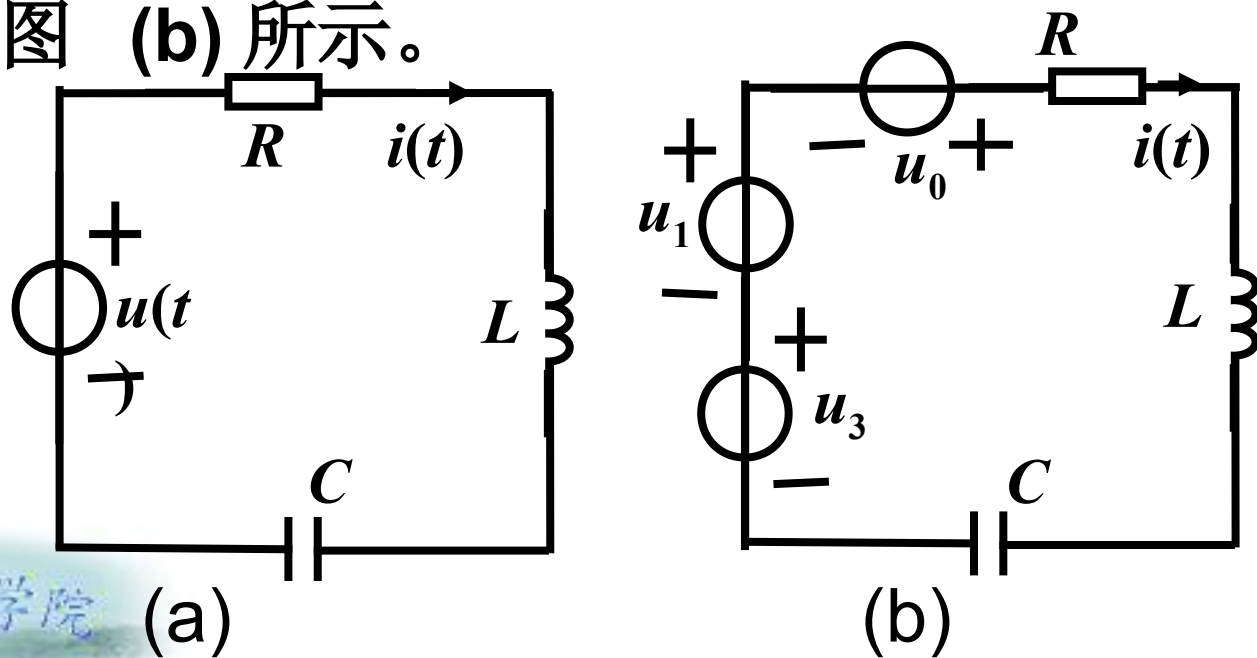
3.8.3 非正弦周期电流电路的计

非正弦周期^算电压 u 或电流 i 既然可以用傅立叶级数分解, 那么它作用于线性电路时, 电路中的各个响应就可以应用叠加原理进行计算。下面通过例题来说明计算过程。

[例 3-16] 图 3-36 (a) 所示电路中, 已知 $R_1 = 10 \Omega$, $L = 0.05 \text{H}$, $C = 50 \times 10^{-6} \text{F}$ 。电源电压为

[例 3-16] 图 3-36 (a) 所示电路中, 已知 $R_1=10\Omega$, $L=0.05\text{H}$, $C=50\times 10^{-6}\text{F}$ 。电源电压为 $u = 40 + 180 \sin \omega t + 60 \sin (3 \omega t + 45^\circ)(\text{V})$ 式中 $\omega = 314 \text{ rad/s}$ 。试求电路中的电流 i 和 I 。

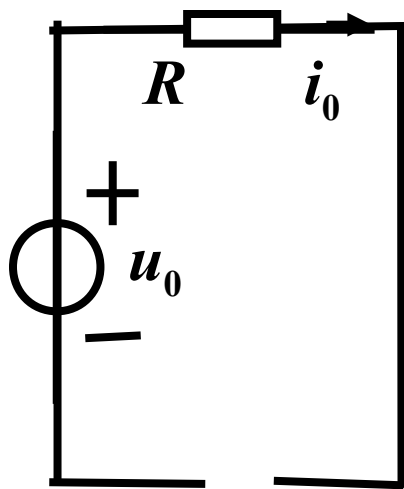
解: 非正弦周期电压由 3 个分量组成, 可以看作 3 个独立的电源 u_0 、 u_1 和 u_3 串联起来共同作用于电路, 见图 (b) 所示。



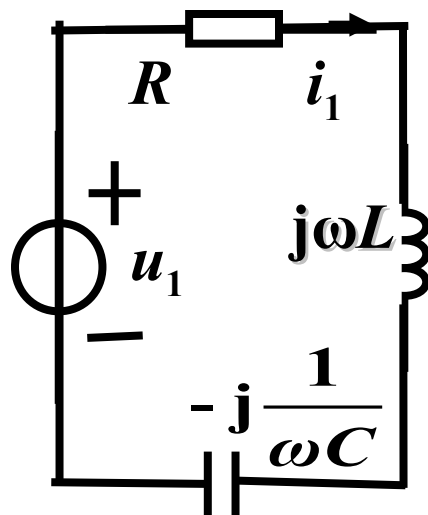
1、直流分量 u_0 单独作用时，其等效电路见下图 (a)。对于直流电压的作用，电感元件相当于短路，电容元件相当于断路。故电流 i 的直流分量为

$$i_0=0 \quad I_0=0$$

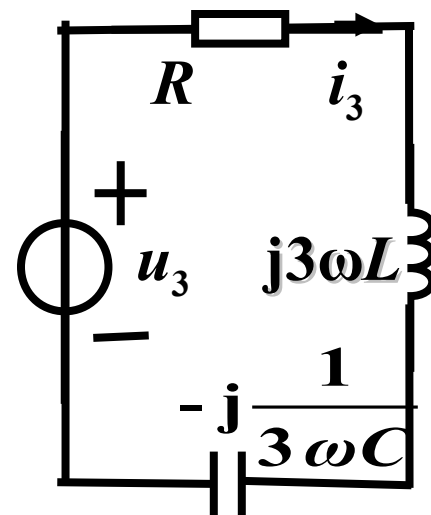
2、在基波 u_1 单独作用时，其等效电路见下图 (b)。用相量法进行计算



(a)



(b)



(c)

2、在基波 u_1 单独作用时，其等效电路见左图 (b)。用相量法进行计算

$$\dot{U}_1 = \frac{180}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ (\text{V})$$

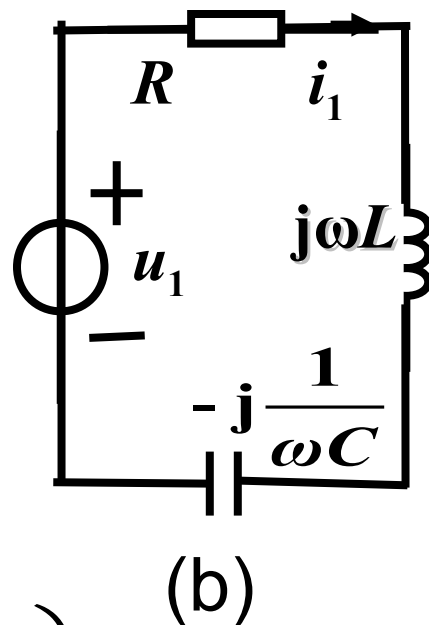
$$Z_1 = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= 10 + j\left(314 \times 0.05 - \frac{1}{314 \times 50 \times 10^{-6}}\right)$$

$$= 49 \angle -78.2^\circ (\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{\frac{180}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{49 \angle -78.2^\circ} = \frac{3.67}{\sqrt{2}} \angle 78.2^\circ (\text{A})$$

$$i_1 = 3.67 \sin(\omega t + 78.2^\circ) (\text{A})$$



2、当3次谐波 u_3 单独作用时，其等效电路见左图 (c)。用相量法进行计算。注意由于与基波频率不同，所以电感与电容表现出来的阻抗与基波不同

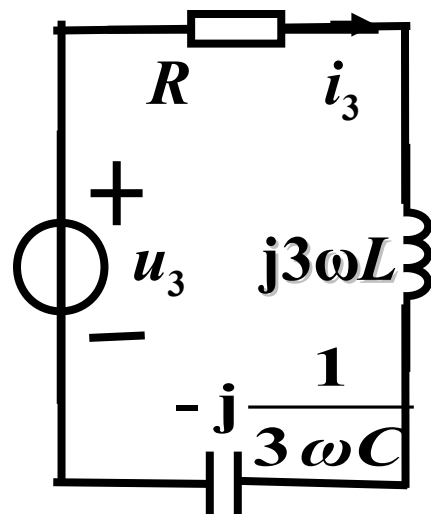
$$\dot{U}_3 = \frac{60}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ (\text{V})$$

$$Z_3 = R + j \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right)$$

$$= 10 + j \left(3 \times 314 \times 0.05 - \frac{1}{3 \times 314 \times 50 \times 10^{-6}} \right)$$

$$= 27.7 \angle 68.9^\circ (\Omega)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{Z_3} = \frac{\frac{60}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ}{27.7 \angle 68.9^\circ} = \frac{2.71}{\sqrt{2}} \angle -23.9^\circ (\text{A})$$



(c)

$$\dot{I}_3 = \frac{2.71}{\sqrt{2}} \angle -23.9^\circ (\text{A})$$

$$i_3 = 2.17 \sin(3\omega t - 23.9^\circ) (\text{A})$$

4、应用叠加原理求电路电流的瞬时值

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$= 3.67 \sin(\omega t + 78.9^\circ) + 2.17 \sin(3\omega t - 23.9^\circ) (\text{A})$$

按式 (3-52) , 电流的有效值为

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3.67}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2.17}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3.01 (\text{A}) \end{aligned}$$

